

## Diferenciál a Taylorův polynom

**Příklad 1.** Vypočtěte diferenciál funkce:

- a)  $f(x) = x \sin 2x$ .
- b)  $f(x) = \operatorname{arctg} 3x$ .
- c)  $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ .
- d)  $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ .

*Nápověda:* Není zadán bod  $x_0$ , ani přírůstek  $dx$ , proto diferenciál bude zapsán ve tvaru  $df = f'(x) dx$ .

**Příklad 2.** Vypočtěte diferenciál funkce  $f(x)$  v bodě  $x_0$  pro přírůstek  $dx$ :

- a)  $f(x) = x^2 + x + 1$ ,  $x_0 = 2$ ,  $dx = 0,1$ ; *Výsledek:* 0.5.
- b)  $f(x) = x^3$ ,  $x_0 = 4$ ; *Výsledek:* 48  $dx$ .
- c)  $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ ,  $x_0 = 3$ ,  $dx = 0,3$ ; *Výsledek:*  $\frac{0.3}{\sqrt{10}}$ .

**Příklad 3.** Nalezněte Taylorův polynom funkce  $f(x)$  stupně  $n$  se středem v bodě  $x_0$ :

- a)  $f(x) = \ln x$ ,  $n = 4$ ,  $x_0 = 4$ ; *Výsledek:*  $T = \ln 4 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{32}(x-4)^2 + \frac{1}{192}(x-4)^3 - \frac{1}{1024}(x-4)^4$ .
- b)  $f(x) = xe^{-x}$ ,  $n = 4$ ,  $x_0 = 0$ ; *Výsledek:*  $T = x - x^2 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{6}x^4$ .
- c)  $f(x) = x^x - 1$ ,  $n = 3$ ,  $x_0 = 1$ ; *Výsledek:*  $T = (x-1) + (x-1)^2 + \frac{1}{2}(x-1)^3$ .

**Příklad 4.** Vyjádřete polynom  $P(x) = x^4 - 3x^2 - 10x + 11$  v mocninách  $(x-2)$ .

*Výsledek:*  $P(x) = -5 + 10(x-2) + 21(x-2)^2 + 8(x-2)^3 + (x-2)^4$ .

**Příklad 5.** Vypočtěte  $\operatorname{arctg} 1,7$  pomocí vhodného Taylorova polynomu třetího stupně a porovnejte s přesnou hodnotou spočtenou na kalkulačce.

*Nápověda:* Zvolíme  $x_0 = 1$ ,  $f(x) = \operatorname{arctg} x$ ,  $n = 3$ . Vyjde  $T = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{12}(x-1)^3$ . Na kalkulačce spočteme  $\operatorname{arctg} 1.7 = 1.039072$ , zatímco  $T(1.7) = 1.0414814$ .

**Příklad 6.** Vypočtěte  $\cos 5^\circ$  s přesností  $10^{-6}$ .

*Nápověda:* Je nabíledni, že  $f(x) = \cos x$ . Musíme dále určit střed  $x_0$  a stupeň  $n$  Taylorova polynomu. Anžto  $5^\circ$  je  $\frac{\pi}{36}$  radiánů, což je číslo blízké nule, tak zvolíme  $x_0 = 0$  a použijeme notoricky známý Taylorův polynom funkce  $\cos x$  se středem v bodě  $x_0 = 0$ :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R(x),$$

kde

$$R(x) = (-1)^{n+1} \frac{\cos^{2n+2}(\xi)}{(2n+2)!} x^{2n+2},$$

kde  $\xi \in \langle x_0, x \rangle$ , tj. v našem případě  $\xi \in \langle 0, \frac{\pi}{36} \rangle$ . Abychom určili počet členů  $n$ , tak odhadneme zbytek takto:

$$|R(x)| \leq \left| \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \right|. \quad (0.1)$$

(neboť pro libovolné  $\xi$  platí  $|\cos \xi| \leq 1$ . Do pravé části nerovnosti (1) dosadíme za  $x$  hodnotu  $\frac{\pi}{36}$  a hledáme takové  $n$ , aby  $|R(x)| \leq 10^{-6}$ . Nerovnosti  $|R(\frac{\pi}{36})| \leq 10^{-6}$  vyhovuje  $n = 2$ , takže stačí vzít aproximaci tvaru

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}.$$

Dosazením  $\frac{\pi}{36}$  do pravé strany předchozího vzorce dostaneme hodnotu 0.996195.

**Příklad 7.** Vypočtěte číslo  $e$  s chybou menší než  $\frac{1}{1000}$ .

*Nápověda:* Není nic jasnějšího, že  $f(x) = e^x$ . Číslo  $e$  dostaneme pro  $x = 1$ , takže zvolíme střed  $x_0 = 0$ . Budeme tedy mít Taylorův polynom tvaru

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R(x)$$

kde  $R(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^\xi$ ,  $\xi \in \langle 0, 1 \rangle$ . Zbývá určit počet členů  $n$ . Nerovnost  $R(1) < \frac{1}{1000}$  vede k nerovnosti  $\frac{e^\xi}{(n+1)!} < \frac{1}{1000}$ . Protože  $\xi < 1$ , tak  $e^\xi < e < 3$ . Nerovnosti  $\frac{3}{(n+1)!} < \frac{1}{1000}$  vyhovuje číslo  $n = 6$ . Máme tedy

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!}.$$

**Příklad 8.** Vypočtěte hodnotu  $\sqrt[4]{83}$  s přesností  $10^{-6}$ .

*Nápověda:*

$$\sqrt[4]{83} = \sqrt[4]{81+2} = 3 \left(1 + \frac{2}{81}\right)^{\frac{1}{4}}$$

takže použijeme Taylorův polynom funkce  $f(x) = (1+x)^s$ . Analogicky jako v předchozím příkladě odhadneme zbytek a vyjde nám, že stačí vzít první čtyři členy Taylorova polynomu

$$(1+x)^s \approx 1 + sx + \frac{s(s-1)}{2!}x^2 + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!}x^3.$$

Dosazením  $x = \frac{2}{81}$ ,  $s = \frac{1}{4}$  vyjde 3.01835.