4. Hodnost matice

Definice 4.1. Nechť $\mathbf{A}$ je matice typu (m, n). Pak **hodnost matice A** je rovna maximálnímu počtu jejích lineárně nezávislých řádků. Hodnost matice značíme $h(\mathbf{A})$.

Poznámka 4.2. Ujasněme si, co rozumíme pod pojmem lineárně nezávislé řádky. Představme si řádky matice $\mathbf{A}$ typu (m, n) jako vektory $\vec{\mathbf{a}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{a}}_m$ a předpokládejme, že žádný z nich není nulový. Řekneme, že nenulové vektory $\vec{\mathbf{a}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{a}}_m$ (tj. řádky matice) jsou **lineárně závislé**, jestliže existují čísla $t_1, \ldots, t_m$ z nichž alespoň jedno je různé od nuly tak, že

$$t_1\vec{\mathbf{a}}_1 + \cdots + t_m\vec{\mathbf{a}}_m = \vec{\mathbf{o}}.$$

V opačném případě říkáme, že jsou **lineárně nezávislé**.

Poznámka 4.3. **Lineární nezávislost** m vektorů lze definovat i takto: nenulové vektory $\vec{\mathbf{a}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{a}}_m$ se nazývají **lineárně nezávislé**, jestliže platí

$$t_1\vec{\mathbf{a}}_1 + t_2\vec{\mathbf{a}}_2 + \cdots + t_m\vec{\mathbf{a}}_m = 0 \Rightarrow t_1 = t_2 = \cdots = t_m = 0 \quad \text{pro každé} \quad t_1, t_2, \ldots, t_m \in \mathbb{R}.$$

Dříve než se budeme zabývat praktickým výpočtem hodnosti matice, připomeňme si, jaké jsou elementární řádkové úpravy matice $\mathbf{A}$:

Věta 4.4. Nechť $\mathbf{A}$ je matice typu (m, n). Pak každá z následujících úprav matice $\mathbf{A}$ se nazývá **elementární řádková úprava**:

1. libovolná záměna pořadí řádků;
2. vynásobení libovolného řádku *nenulovým* číslem;
3. přičtení lineární kombinace několika řádků k jednomu řádku;

Věta 4.5. Provedením libovolné elementární řádkové úpravy se hodnost matice $\mathbf{A}$ nezmění.

Z předchozích úvah vyplývá, že při praktickém zjišťování hodnosti dané matice bude zřejmě výhodné pomocí elementárních řádkových úprav převést matici na nějaký „jednoduchý tvar“, z něhož bude hodnost přímo vidět. Tento „jednoduchý tvar“ popisuje následující definice.

Definice 4.6. Nechť $\mathbf{A}$ je matice typu (m, n). Řekneme, že $\mathbf{A}$ je **matice ve schodovitém tvaru**, jestliže v matici $\mathbf{A}$ každý nenulový řádek začíná větším počtem nul než předchozí řádek.

Věta 4.7. Každou matici lze konečným počtem elementárních řádkových úprav převést na schodovitý tvar.

Věta 4.8. **Hodnost matice** ve schodovitém tvaru je rovna počtu jejích nenulových řádků.

Příklad 4.9. Určete hodnost matice $\mathbf{A}$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 7 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

.

Řešení. Matici převedeme elementárními řádkovými úpravami do schodovitého tvaru.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 7 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 13 & -9 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 13 & -9 \\ 0 & 0 & -35 \end{pmatrix} \Rightarrow h(\mathbf{A}) = 3.$$

Příklad 4.10. Určete hodnost matice **B**.

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 & 8 \\ 1 & 3 & -5 & -1 \\ -2 & -6 & 10 & 2 \end{pmatrix}$$

.

Řešení. Matici převedeme elementárními řádkovými úpravami do schodovitého tvaru.

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 & 8 \\ 1 & 3 & -5 & -1 \\ -2 & -6 & 10 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 13 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow h(\mathbf{B}) = 2.$$