3. Limita a spojitost

Příklad 3.1. Vyšetřete limitu $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x-2y}{3x+y}$.

Řešení. K vyšetření limity použijeme metodu postupných limit. Platí

$$L_1 = \lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0}\frac{x-2y}{3x+y}) = \lim_{x\to 0}\frac{x}{3x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

$$L_2 = \lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0}\frac{x-2y}{3x+y}) = \lim_{y\to 0}\frac{-2y}{y} = \lim_{x\to 0}(-2) = -2.$$

Obě postupné limity L_1, L_2 existují, ale jsou různé. Z věty o jednoznačnosti limity plyne, že daná limita neexistuje.

Příklad 3.2. Vyšetřete limitu $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x+y}{x-y}$.

Řešení. K vyšetření limity použijeme opět metodu postupných limit. Platí

$$L_1 = \lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0}\frac{x+y}{x-y}) = \lim_{x\to 0}\frac{x}{x} = \lim_{x\to 0} 1 = 1.$$

$$L_2 = \lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0}\frac{x+y}{x-y}) = \lim_{y\to 0}\frac{y}{-y} = \lim_{x\to 0}(-1) = -1.$$

Obě postupné limity L_1, L_2 existují, ale jsou různé. Z věty o jednoznačnosti limity plyne, že daná limita neexistuje.

Příklad 3.3. Vyšetřete limitu $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x^3y}{x^4+y^4}$.

Řešení. Metoda postupných limit selhává. K vyšetření limity použijeme metodu svazku přímek. Platí

$$L^* = \lim_{x\to 0, y=kx}\frac{x^3y}{x^4+y^4} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3\cdot kx}{x^4+k^4x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{kx^4}{x^4(k^4+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{k}{k^4+1} = \frac{k}{k^4+1}.$$

Protože limita L^* závisí na parametru k, z věty o jednoznačnosti limity plyne, že funkce f v bodě $[0,0]$ nemá limitu.

Příklad 3.4. Vyšetřete limitu $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$.

Řešení. Metoda postupných limit i metoda svazku přímek selhává. K vyšetření limity použijeme metodu svazku parabol. Platí

$$L^{**} = \lim_{x\to 0, y=kx^2}\frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot kx^2}{x^4+k^2x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{k}{k^2+1} = \frac{k}{k^2+1}.$$

Protože limita L^{**} závisí na parametru k, z věty o jednoznačnosti limity plyne, že funkce f v bodě $[0,0]$ nemá limitu.

Příklad 3.5. Vyšetřete limitu $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \frac{xy}{x^2+y^2}$.

Řešení. K vyšetření limity použijeme metodu polárních souřadnic. Platí

$$L^{***} = \lim_{\rho\to 0, x=\rho\cos\varphi, y=\rho\sin\varphi} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho\cos\varphi\rho\sin\varphi}{\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi} = \lim_{\rho\to 0}\cos\varphi\sin\varphi = \cos\varphi\sin\varphi.$$

Protože limita L^{***} závisí na φ, funkce f nemá v bodě $[0,0]$ limitu.

Příklad 3.6. Vyšetřete, zda je funkce $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{pro } [x,y]\neq[0,0] \\ 0 & \text{pro } [x,y]=[0,0]. \end{cases}$ spojitá v bodě $[0,0]$.

Řešení. Aby byla funkce f spojitá v bodě $[0,0]$, musí mít v tomto bodě limitu rovnu nule. Dokažme, že tomu tak je. Použijeme větu, která tvrdí, že limita součinu funkce jejíž limita je nula a ohraničené funkce je rovna rovněž nula. Zřejmě platí

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{[x,y]\to[0,0]} x \cdot \lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

Přitom $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} x = 0$. Ukažme nyní že funkce $\frac{xy}{x^2+y^2}$ je ohraničená. Platí

$$\big(|x|-|y|\big)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 2|xy| + y^2 \geq 0 \Rightarrow 2|xy| \leq x^2+y^2 \Rightarrow \frac{|xy|}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{1}{2}.$$

Tedy funkce $\frac{xy}{x^2+y^2}$ je ohraničená.

Příklad 3.7. Vyšetřete, zda je funkce $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4y^2}{x^8+y^4} & \text{pro } [x,y]\neq[0,0] \\ 0 & \text{pro } [x,y]=[0,0] \end{cases}$ spojitá v bodě $[0,0]$.

Řešení. Aby byla funkce f spojitá v bodě $[0,0]$, musí mít v tomto bodě limitu rovnu nule. Metoda postupných limit, metoda svazku přímek i metoda polárních souřadnic dávají výsledek nula. Metodou svazku parabol ukažme, že limita nula není a tedy zkoumaná funkce je v daném bodě nespojitá.

$$L^{**} = \lim_{x\to 0, y=kx^2} \frac{x^4y^2}{x^8+y^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4(kx^2)^2}{x^8+(kx^2)^4} = \lim_{x\to 0} \frac{k^2x^8}{(1+k^4)x^8} = \frac{k^2}{1+k^4}.$$

Limita L^{**} závisí na parametru k. Odtud podle věty o jednoznačnosti limity plyne, že funkce f je v $[0,0]$ nespojitá.

Příklad 3.8. Spočtěte limitu $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \frac{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}{x^2+y^2}$.

Řešení. Do funkce nelze bezprostředně dosadit. Provedeme proto vhodnou algebraickou úpravu. Výraz rozšíříme.

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}{x^2+y^2} = \lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{(\sqrt{x^2+y^2+1}-1)(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)}{(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)} =$$

$$= \lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{(x^2+y^2+1-1)}{(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)} = \lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}+1} = \frac{1}{2}.$$

Příklad 3.9. Spočtěte limitu $\lim\limits_{[x,y]\to[2,2]} \frac{x^3-y^3}{x^4-y^4}$.

Řešení. Provedeme algebraickou úpravu funkce. Rozložíme čitatele i jmenovatele výrazu a vykrátíme.

$$\lim_{[x,y]\to[2,2]} \frac{x^3-y^3}{x^4-y^4} = \lim_{[x,y]\to[2,2]} \frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{(x-y)(x+y)(x^2+y^2)} = \lim_{[x,y]\to[2,2]} \frac{x^2+xy+y^2}{(x+y)(x^2+y^2)} = \frac{4+4+4}{4(4+4)} = \frac{3}{8}.$$

Příklad 3.10. Spočtěte limitu $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \frac{3(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2}$.

Řešení. Provedeme algebraickou úpravu funkce. Výraz rozšíříme vhodným zlomkem.

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{3(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2} = \lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{3(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2+4}+2)}{(\sqrt{x^2+y^2+4}-2)(\sqrt{x^2+y^2+4}+2)} =$$

$$= \lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{3(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2+4}+2)}{x^2+y^2+4-4} = \lim_{[x,y]\to[0,0]} 3(\sqrt{x^2+y^2+4}+2) = 3(2+2) = 12.$$