6. Vektorový počet

Budeme se pohybovat v prostoru $\mathbb{R}^n$, což je kartézská mocnina množiny reálných čísel $\mathbb{R}$;

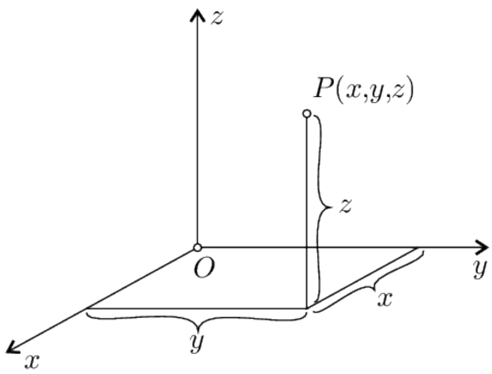
$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}.$$

Obvykle nám bude stačit omezení na případy $n = 1, 2, 3$; nicméně teorie je platná obecně. Prvky $\mathbb{R}^n$ budeme nazývat **body** a značit např.

$$A = [a_1, \ldots, a_n],$$

reálná čísla $a_1, \ldots, a_n$ pak nazýváme **souřadnice bodu**.

Poznámka 6.1. Polohu obecného bodu P v $\mathbb{R}^3$ charakterizujeme nejčastěji trojicí souřadnic x, y, z a znázorňujeme jej v pravotočivé soustavě $Oxyz$, viz. Obrázek 6.1.



Obr. 6.1: Význam trojice souřadnic $[x, y, z]$ charakterizujících polohu bodu $P(x, y, z)$ v trojrozměrné pravotočivé soustavě pravoúhlých souřadnic $Oxyz$.

Definice 6.2. Uspořádanou dvojici bodů A, B nazveme **vázaný vektor** v $\mathbb{R}^n$ s **počátkem** v A a s **koncem** v B. Značíme

$$\overrightarrow{AB} = ([a_1, \ldots, a_n], [b_1, \ldots, b_n]).$$

Je zřejmé, že vázaný vektor $\overrightarrow{AB}$ lze zadat i tak, že zadáme bod A a spolu s ním uspořádanou n-tici reálných čísel

$$(b_1 - a_1, \ldots, b_n - a_n).$$

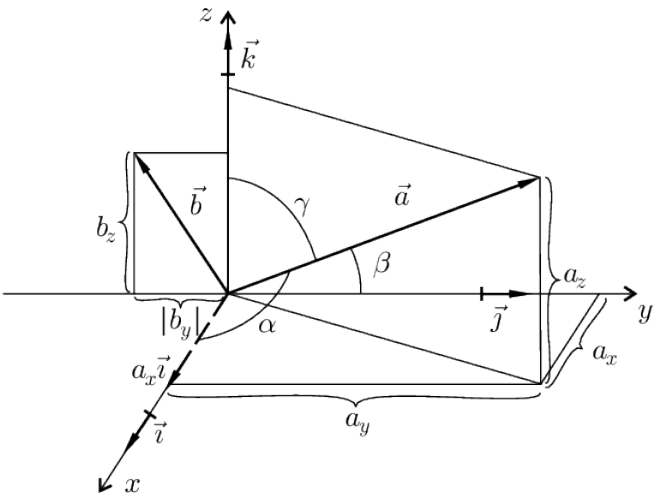
Samotnou tuto n-tici pak nazýváme **volný vektor** a značíme

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB};$$

je ovšem jasné, že $\overrightarrow{u}$ body A, B neurčuje, protože i jiné body C, D mohou vést k témuž volnému vektoru u (přesněji, definujeme zde binární relaci mezi vázanými vektory: řekneme, že dva vázané vektory $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ patří do relace $\mathcal{R}$, jestliže $(b_1 - a_1, \ldots, b_n - a_n) = (d_1 - c_1, \ldots, d_n - c_n)$; tato relace (protože je ekvivalence) určuje rozklad množiny vázaných vektorů na třídy zvané volné vektory). Dále se budeme zabývat volnými vektory.

Poznámka 6.3. Při vyšetřování vztahů mezi vektorovými veličinami s užitím kartézské soustavy souřadnic se zavádějí některé další pojmy a operace. **Kolmé průměty** vektorové veličiny $\vec{a}$ do souřadnicových os se značí a_x, a_y, a_z (viz Obr. 6.2) a jsou definovány vztahy

$$a_x = a\cos\alpha, \quad a_y = a\cos\beta, \quad a_z = a\cos\gamma\,. \tag{6.1}$$



Obr. 6.2: Vyjádření vektorů $\vec{a}$ a $\vec{b}$ pomocí jejich složek a_x, a_y, a_z (resp. $b_x(=0), b_y, b_z$) a jednotkových vektorů $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$. V obrázku jsou rovněž vyznačeny úhly, které svírá vektor $\vec{a}$ se souřadnicovými osami.

Tyto veličiny se nazývají rovněž souřadnice vektoru $\vec{a}$. Ze vztahu (6.1) plyne $a_x > 0$ pro $0 \leq \alpha \leq \pi/2, a_x = 0$ pro $\alpha = \pi/2, a_x < 0$ pro $\pi/2 < \alpha \leq \pi$. Užívá se zápisu $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$. Vektor $\vec{a}$ a jeho souřadnice mají stejné jednotky.

Je-li dán vektor svými souřadnicemi, např. $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, lze určit jeho velikost a úhly, které svírá se souřadnicovými osami, s užitím vztahů plynoucích z Obrázku 6.2:

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2};$$

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{a}, \cos\beta = \frac{a_y}{y}, \cos\gamma = \frac{a_z}{a}.$$

Definice 6.4. (Součet a násobení skalárem) Pro volné vektory nyní definujeme operaci **součet** $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{w}$ vztahem

$$(w_1, \ldots, w_n) = (u_1 + v_1, \ldots, u_n + v_n)$$

a operaci **násobení skalárem** $c\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$ $(c \in \mathbb{R})$ vztahem

$$(v_1, \ldots, v_n) = (cu_1, \ldots, cu_n)\,.$$

Množinu volných vektorů na $\mathbb{R}^n$ spolu s těmito operacemi pak nazýváme **vektorový prostor** a značíme $\mathbf{V}^n$ (poznamenáváme zde, že vůbec není naším cílem budovat obecnou teorii algebraických struktur zvaných vektorové prostory; název vektorový prostor zde tedy užíváme vědomě jen pro právě uvedený příklad).

Povšimněme si, že volné vektory spolu s binární operací sčítání jsou dalším příkladem grupy, která byla definována v tématu *Relace, zobrazení, operace a algebraické struktury*. Neutrálním prvkem je zde tzv. **nulový vektor**

$$\overrightarrow{o} = (0, \ldots, 0).$$

Definice 6.5. Řekneme, že vektor $\overrightarrow{v}$ je **lineární kombinací** vektorů $\overrightarrow{u}_1, \ldots, \overrightarrow{u}_k$, jestliže ho pro nějaká $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ lze vyjádřit jako

$$\overrightarrow{v} = c_1\overrightarrow{u}_1 + \cdots + c_k\overrightarrow{u}_k\,.$$

Poznámka 6.6. Povšimněme si, že nulový vektor $\overrightarrow{o}$ je vždy **triviální lineární kombinací** (tj. s $c_1 = \cdots = c_k = 0$) libovolných vektorů $\overrightarrow{u}_1, \ldots, \overrightarrow{u}_k$. Někdy je také jejich netriviální kombinací, tzn. alespoň jedno z čísel $c_1, \ldots, c_k$ je nenulové (je-li např. $k = 2$, $\overrightarrow{u}_1 = \overrightarrow{u}$ a $\overrightarrow{u}_2 = -\overrightarrow{u}$, vztah je splněn pro libovolné $c_1 = c_2 = c \in \mathbb{R}$).

To nás vede k následující definici.

Řekneme, že vektory $\overrightarrow{u}_1, \dots, \overrightarrow{u}_k$ jsou **lineárně závislé**, pokud je nulový vektor jejich netriviální lineární kombinací. Pokud tomu tak není, tedy nulový vektor lze obdržet pouze jako triviální lineární kombinaci vektorů $\overrightarrow{u}_1, \dots, \overrightarrow{u}_k$, nazveme tyto vektory **lineárně nezávislé**.

V prostoru $\mathbf{V}^n$ lze vybrat nejvýše n lineárně nezávislých vektorů; množina n lineárně nezávislých vektorů se nazývá **báze** $\mathbf{V}^n$.

Lze sice vybrat nekonečně mnoho bází $\mathbf{V}^n$, jednu však preferujeme: je to tzv. **kanonická báze**:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{e}_1 &= (1, 0, 0, \dots, 0)\\ \overrightarrow{e}_2 &= (0, 1, 0, \dots, 0)\\ \overrightarrow{e}_3 &= (0, 0, 1, \dots, 0)\\ &\dots\\ \overrightarrow{e}_n &= (0, 0, 0, \dots, 1)\end{aligned}$$

Povšimněme si, že vektory kanonické báze $\overrightarrow{e}_1, \dots, \overrightarrow{e}_n$ zapsané jako řádky matice dávají jednotkovou matici E; obecně, vektory libovolné báze představují vždy regulární matici.

Poznámka 6.7. Jednotkové vektory ve směru souřadnicových os Ox, Oy, Oz v $\mathbb{R}^3$ budeme obvykle značit $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$. Tyto vektory jsou navzájem kolmé (viz Obrázek 6.2) a platí pro ně $|\vec{\imath}| = |\vec{\jmath}| = |\vec{k}| = 1$. Vektory $a_x\vec{\imath}, a_y\vec{\jmath}, a_z\vec{k}$ o velikostech $|a_x|, |a_y|, |a_z|$ se nazývají složky vektoru $\vec{a}$ v souřadnicových osách. Platí pro ně tzv. **semikartézské vyjádření vektoru $\vec{a}$**

$$\vec{a} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k}.$$

Předpokládejme, že vektor $\overrightarrow{u}$ má souřadnice v obvyklé, tedy kanonické bázi. Uvažujme jinou bázi $\overrightarrow{a}_1, \dots, \overrightarrow{a}_n$, zapsanou řádkově do matice ji označme A. Vektor $\overrightarrow{u}$ v této bázi budeme označovat $\overrightarrow{u}_A$. Zřejmě platí (vektory $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{u}_A$ píšeme sloupcově)

$$A\overrightarrow{u}_A = E\overrightarrow{u}$$

a tedy

$$\overrightarrow{u}_A = A^{-1}\overrightarrow{u}.$$

Ještě obecněji, předpokládejme, že vektor $\overrightarrow{u}_B$ je vyjádřen v bázi (maticově) B a chceme jej vyjádřit v bázi A. Postupem analogickým předchozímu odstavci zjistíme, že

$$\overrightarrow{u}_A = A^{-1}B\overrightarrow{u}_B.$$

Matici $A^{-1}B$ nazýváme **matice přechodu** od báze B k bázi A (v této důležité úloze aplikujeme tedy jak výpočet inverzní matice, tak součin matic).

Definice 6.8. (Skalární součin) Na $\mathbf{V}^n$ lze zavést další operaci: **skalární součin** $\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v} = c$ ($c \in \mathbb{R}$) definujeme vztahem

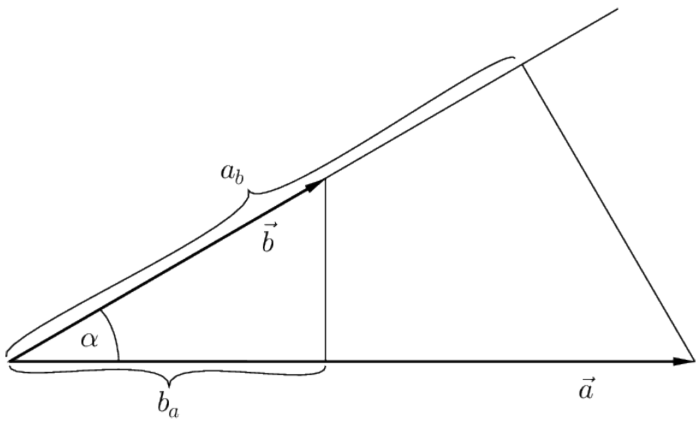
$$c = u_1v_1 + \cdots + u_nv_n.$$

Vektorový prostor $\mathbf{V}^n$ s takto zavedeným skalárním součinem nazýváme **euklidovský prostor** a značíme $\mathbf{E}^n$ (skalární součin lze zavést i jiným způsobem, tomu se ale zde nevěnujeme).

Geometrický význam skalárního součinu. Skalární součin $\vec{a}\cdot\vec{b}$ dvou (libovolných) vektorových veličin $\vec{a}, \vec{b}$ je skalární veličina c daná vztahem

$$c(= \vec{a}\cdot\vec{b}) = ab\cos\alpha, \tag{6.2}$$

kde α je dutý nebo přímý úhel sevřený vektory a, b (viz Obrázek 6.3).

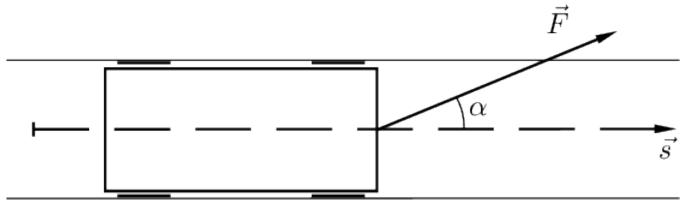


Obr. 6.3: Geometrický význam skalárního součinu $\vec{a} \cdot \vec{b} = a\ b \cos\alpha (= a_b b = b_a a)$.

Příklad 6.9. Vagón je tažen na přímém úseku délky $s = 20\,\mathrm{m}$ lanem, které svírá se směrem rychlosti vagonu úhel $\alpha = 20°$ a které je napínáno silou o velikosti $F = 800\,\mathrm{N}$. Vyjádřete práci W vykonanou silou $\vec{F}$ pomocí skalárního součinu a vypočtěte ji.

Řešení. Zavedeme vektor $\vec{s}$ podle Obrázku 6.4. Pak

$$\begin{aligned} W &= F_s s = F \cdot \cos\alpha) \cdot s = \vec{F} \cdot \vec{s}, \\ W &= \vec{F} \cdot \vec{s} = F s \cos\alpha = 800\,\mathrm{N} \cdot 20\,\mathrm{m} \cdot \cos 20° = 1{,}50 \cdot 10^4\,\mathrm{J}. \end{aligned}$$



Obr. 6.4: K příkladu 6.9.

Definice 6.10. (Vektorový součin) Dále, definujme pro $n > 1$ na $\mathbf{V}^n$ tzv. **vektorový součin** jako $(n-1)$-ární operaci přiřazující vektorům $\overrightarrow{u}_1 = (u_{11}, \dots, u_{1n}), \dots, \overrightarrow{u}_{n-1} = (u_{(n-1)1}, \dots, u_{(n-1)n})$ vektor $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u}_1 \times \cdots \times \overrightarrow{u}_{n-1}$ jako determinant

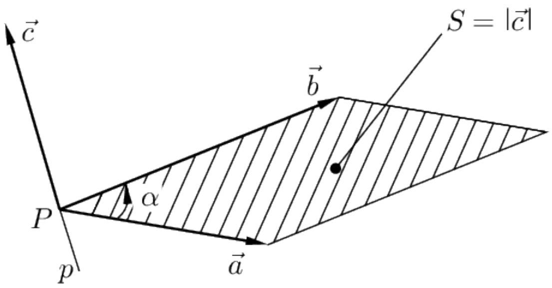
$$\overrightarrow{w} = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ & & \dots & \\ u_{(n-1)1} & u_{(n-1)2} & \dots & u_{(n-1)n} \\ \overrightarrow{e}_1 & \overrightarrow{e}_2 & \dots & \overrightarrow{e}_n \end{vmatrix},$$

kde $\overrightarrow{e}_1, \dots, \overrightarrow{e}_n$ jsou vektory kanonické báze.

Pro $n = 2$ jde o unární operaci, která vektoru $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2)$ přiřadí vektor $\overrightarrow{w} = u_1(0,1) - u_2(1,0) = (-u_2, u_1)$. Pro $n = 3$ jde o binární operaci, která vektorům $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ přiřadí vektor $\overrightarrow{w} = u_1 v_2(0,0,1) + u_2 v_3(1,0,0) + u_3 v_1(0,1,0) - u_1 v_3(0,1,0) - u_2 v_1(0,0,1) - u_3 v_2(1,0,0) = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1)$.

Poznámka 6.11. Doporučujeme čtenáři hlouběji se seznámit s vlastnostmi operace vektorového součinu (tato operace je mj. pro $n = 3$ antikomutativní: $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u}$). Důležitým výsledkem (dokáže se přímým výpočtem) dále je, že skalární součin vektoru $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u}_1 \times \cdots \times \overrightarrow{u}_{n-1}$ s libovolným z vektorů $\overrightarrow{u}_1, \dots, \overrightarrow{u}_{n-1}$ je vždy nulový.

Geometrický význam vektorového součinu. Vektorový součin $\vec{a} \times \vec{b}$ *dvou* (libovolných) vektorových veličin $\vec{a}, \vec{b}$ je vektorová veličina $\vec{c}$, kterou je graficky možno znázornit tak, že oba vektory $\vec{a}, \vec{b}$ umístíme do jednoho (libovolného) bodu (bod P v Obrázku 6.5).



Obr. 6.5: Geometrický význam vektorového součinu $\vec{a} \times \vec{b}$.

Pro vektor $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ platí:

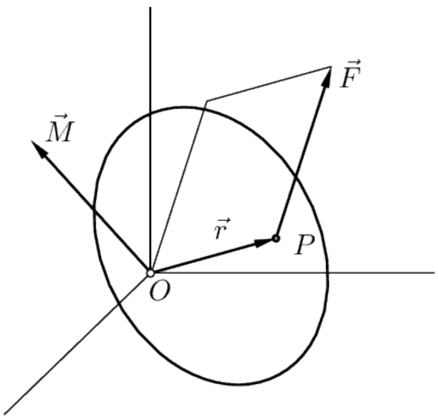
1. Velikost:

$$|\vec{c}| = ab \sin \alpha,$$

   tj. platí, že velikost vektoru $\vec{c}$ je rovna plošnému obsahu kosodélníka vyšrafovaného v Obrázku 6.5, kde α je tupý nebo přímý úhel sevřený vektory $\vec{a}, \vec{b}$.

2. Směr je kolmý na rovinu danou vektory $\vec{a}, \vec{b}$ tak, že vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ (v uvedeném pořadí) tvoří pravotočivý trojhran (nebo: pravotočivý šroub — otáčení kolem přímky p od $\vec{a}$ do $\vec{b}$ nejkratší cestou, vektor $\vec{c}$ má směr postupu šroubu) – viz Obrázek 6.5.

Příklad 6.12. Síla $\vec{F}$ působící na těleso v bodě P vyvozuje vzhledem k počátku souřadnic otáčivý moment $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$, kde $\vec{r}$ je polohový vektor bodu P (viz Obrázek 6.6).

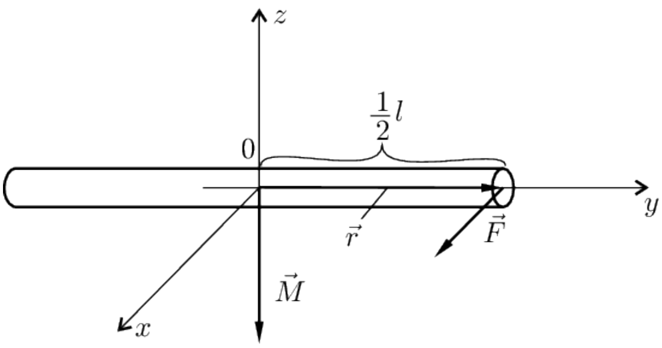


Obr. 6.6: Příklad užití vektorového součinu: otáčivý moment $\vec{M}$ síly $\vec{F}$ působící na těleso v bodě P, jehož polohový vektor je $\vec{r}$, je roven $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$.

Příklad 6.13. Na konci tyče délky l působí síla $\vec{F} \uparrow\uparrow Ox$ podle Obrázku 6.7. Určete otáčivý moment síly $\vec{F}$ vzhledem k počátku O. (Pozn.: symbolem $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ vyjadřujeme, že vektory $\vec{a}, \vec{b}$ jsou souhlasně rovnoběžné, tj. paralelní. Symbol $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ vyjadřuje, že vektory $\vec{a}, \vec{b}$ jsou nesouhlasně rovnoběžné, tj. antiparalelní).

Řešení. $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$. Vektor $\vec{M}$ zakreslíme v bodě O, směr je zřejmý z Obrázku 6.7. Platí

$$M = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \sin 90^\circ = \frac{1}{2} lF.$$



Obr. 6.7: K příkladu 6.13.

Definice 6.14. Pro $n > 1$ na $\mathbf{V}^n$ definujeme také tzv. **vnější součin** jako n-ární operaci přiřazující vektorům $\overrightarrow{u}_1 = (u_{11}, \ldots, u_{1n}), \ldots, \overrightarrow{u}_n = (u_{n1}, \ldots, u_{nn})$ determinant (tedy číslo)

$$\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \ldots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \ldots & u_{2n} \\ & & \ldots & \\ u_{n1} & u_{n2} & \ldots & u_{nn} \end{vmatrix}.$$

Absolutní hodnota vnějšího součinu vyjadřuje objem n-rozměrného rovnoběžnostěnu s vrcholy O (počátek), $O+\overrightarrow{u}_1$, $O+\overrightarrow{u}_1+\overrightarrow{u}_2, \ldots, O+\overrightarrow{u}_1+\overrightarrow{u}_2+\cdots++\overrightarrow{u}_n$. V prostoru $\mathbf{V}^2$ jde o obsah rovnoběžníka. V prostoru $\mathbf{V}^3$ jde o objem rovnoběžnostěnu (pro úplnost ještě uveďme alternativní možnost: pokud v prostoru $\mathbf{V}^3$ vynásobíme dva vektory $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ vektorově a výsledek pak s třetím vektorem $\overrightarrow{w}$ skalárně, obdržíme tzv. **smíšený součin** tří vektorů; ten splývá s vnějším součinem: tedy jeho absolutní hodnota udává objem rovnoběžnostěnu s hranami představovanými vektory $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ a $\overrightarrow{w}$).

Definice 6.15. Na $\mathbf{E}^n$ dále definujeme **velikost** $|\overrightarrow{u}|$ vektoru $\overrightarrow{u}$ vztahem

$$|\overrightarrow{u}| = \sqrt{\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{u}}$$

(odmocnina skalárního součinu vektoru se sebou samým). Takto zavedená velikost mj. splňuje tzv. **trojúhelníkovou nerovnost**

$$|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}| \le |\overrightarrow{u}|+|\overrightarrow{v}|.$$

Definice 6.16. Můžeme dále na $\mathbf{E}^n$ zavést **úhel** dvou nenulových vektorů $\overrightarrow{u}$ a $\overrightarrow{v}$ jako číslo $\phi \in [0, \pi)$, pro něž

$$\cos\phi = \frac{\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|}.$$

Zřejmě $\phi = \frac{\pi}{2}$ nastává právě tehdy, když skalární součin $\overrightarrow{u}$ a $\overrightarrow{v}$ je nulový; takové vektory tedy nazýváme **kolmé** (a viz nyní znovu Poznámka 6.11).

Pro vektory $\overrightarrow{u}$ a $\overrightarrow{v}$ v $\mathbf{E}^3$ svírající úhel ϕ pak např. platí

$$|\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}| = |\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|\sin\phi,$$

jak si čtenář může nyní dokázat.