5. Diferenciál a Taylorův polynom

Příklad 5.1. Spočtěte diferenciály funkcí f v daném bodě A.

a) $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{xy}$, $A = [3,2]$.

b) $f(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$, $A = [2,1]$.

c) $f(x,y,z) = \frac{x-y}{\sqrt{z}}$, $A = [1,2,4]$.

Řešení.

a) Spočteme parciální derivace funkce $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{xy}$ v bodě $A = [3,2]$. Platí $f'_x = \frac{2x(xy)-(x^2-y^2)y}{x^2y^2} = \frac{x^2+y^2}{x^2y}$, $f'_x(A) = \frac{13}{18}$, $f'_y(A) = \frac{-2y(xy)-(x^2-y^2)x}{x^2y^2} = -\frac{x^2+y^2}{xy^2}$, $f'_y(A) = -\frac{13}{12}$. Diferenciál je tvaru $\mathrm{d}_hf(A) = f'_x(A)\mathrm{d}x + f'_y(A)\mathrm{d}y$. Dosadíme. Platí $\mathrm{d}_hf(A) = \frac{13}{18}\mathrm{d}x - \frac{13}{12}\mathrm{d}y$.

b) Spočteme parciální derivace funkce $f(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$ v bodě $A = [2,1]$. Platí $f'_x = \frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{x^2+y^2}$, $f'_x(A) = \frac{1}{5}$, $f'_y(A) = \frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2} \cdot \frac{-x}{y^2} = \frac{-x}{x^2+y^2}$, $f'_y(A) = -\frac{2}{5}$. Diferenciál je tvaru $\mathrm{d}_hf(A) = f'_x(A)\mathrm{d}x + f'_y(A)\mathrm{d}y$. Provedeme dosazení. Platí $\mathrm{d}_hf(A) = \frac{1}{5}\mathrm{d}x - \frac{2}{5}\mathrm{d}y$.

c) Spočteme parciální derivace funkce $f(x,y,z) = \frac{x-y}{\sqrt{z}}$ v bodě $A = [1,2,4]$. Platí $f'_x = \frac{1}{\sqrt{z}}$, $f'_x(A) = \frac{1}{2}$, $f'_y(A) = \frac{-1}{\sqrt{z}}$, $f'_y(A) = -\frac{1}{2}$, $f'_z = -\frac{x-y}{2(\sqrt{z})^3}$, $f'_z(A) = \frac{1}{16}$. Diferenciál je tvaru $\mathrm{d}_hf(A) = f'_x(A)\mathrm{d}x + f'_y(A)\mathrm{d}y + f'_z(A)dz$. Provedeme dosazení. Platí $\mathrm{d}_hf(A) = \frac{1}{2}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\mathrm{d}y + \frac{1}{16}dz$.

Příklad 5.2. Spočtěte druhé diferenciály následujících funkcí.

a) $f(x,y) = \mathrm{e}^{x-y^2}$.

b) $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$.

c) $f(x,y) = x\ln \frac{y}{x}$.

Řešení.

a) Spočteme druhé parciální derivace funkce $f(x,y) = \mathrm{e}^{x-y^2}$. Platí $f'_x = \mathrm{e}^{x-y^2}$, $f'_y = -2y\mathrm{e}^{x-y^2}$, $f''_{xx} = \mathrm{e}^{x-y^2}$, $f''_{xy} = -2y\mathrm{e}^{x-y^2}$, $f''_{yy} = \mathrm{e}^{x-y^2}(-2y)(-2y) + \mathrm{e}^{x-y^2}(-2) = (4y^2-2)\mathrm{e}^{x-y^2}$. Druhý diferenciál je tvaru $\mathrm{d}^2_hf = f''_{xx}\mathrm{d}x^2 + 2f''_{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + f''_{yy}\mathrm{d}y^2$. Provedeme dosazení. Platí $\mathrm{d}^2_hf = \mathrm{e}^{x-y^2}\mathrm{d}x^2 - -4y\mathrm{e}^{x-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + (4y^2-2)\mathrm{e}^{x-y^2}\mathrm{d}y^2$.

b) Spočteme druhé parciální derivace funkce $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$. Platí $f'_x = \frac{2y}{(x+y)^2}$, $f'_y = \frac{-2x}{(x+y)^2}$, $f''_{xx} = \frac{-4y}{(x+y)^3}$, $f''_{xy} = \frac{2(x-y)}{(x+y)^3}$, $f''_{yy} = \frac{4x}{(x+y)^3}$. Druhý diferenciál je tvaru $\mathrm{d}^2_hf = f''_{xx}\mathrm{d}x^2 + 2f''_{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + f''_{yy}\mathrm{d}y^2$. Provedeme dosazení. Platí $\mathrm{d}^2_hf = \frac{-4y}{(x+y)^3}\mathrm{d}x^2 + \frac{4(x-y)}{(x+y)^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{4x}{(x+y)^3}\mathrm{d}y^2$.

c) Spočteme druhé parciální derivace $f(x,y) = x\ln \frac{y}{x}$. Platí $f'_x = \ln yx + x \cdot \frac{1}{\frac{y}{x}} \cdot \frac{-y}{x^2} = \ln \frac{y}{x} - 1$, $f'_y = x \cdot \frac{1}{\frac{y}{x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{y}$, $f''_{xx} = \frac{1}{\frac{y}{x}} \cdot \frac{-y}{x^2} = \frac{-1}{x}$, $f''_{xy} = \frac{1}{\frac{y}{x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{y}$, $f''_{yy} = \frac{-x}{y^2}$. Druhý diferenciál je tvaru $\mathrm{d}^2_hf = f''_{xx}\mathrm{d}x^2 + 2f''_{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + f''_{yy}\mathrm{d}y^2$. Provedeme dosazení. Platí $\mathrm{d}^2_hf = \frac{-1}{x}\mathrm{d}x^2 + \frac{2}{y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \frac{x}{y^2}\mathrm{d}y^2$.

Příklad 5.3. Spočtěte rovnici tečné roviny a normály ke grafu funkce f v daném v bodě A.

a) $f(x,y) = x^4 + 2x^2y - xy + x$, $A = [1,0]$.

b) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$, $A = [2,1]$.

Řešení.

a) Spočteme parciální derivace funkce $f(x,y) = x^4 + 2x^2y - xy + x$ v bodě $A = [1,0]$.
Platí $f'_x = 4x^3 +$
$+ 4xy - y + 1, f'_x(A) = 5, f'_y(A) = 2x^2 - x, f'_y(A) = 1$.
Dopočítáme z-ovou souřadnici $z_0 = f(A) = 2$.
Rovnice tečné roviny má tvar $z - z_0 = f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)$, kde $A = [x_0,y_0]$.
Provedeme dosazení. Platí $z - 2 = 5(x-1) + 1(y-0)$. Odtud plyne $5x + y - z - 3 = 0$. Nyní nalezneme rovnici normály. Její obecná rovnice je tvaru $\frac{x-x_0}{f'_x(x_0,y_0)} = \frac{y-y_0}{f'_y(x_0,y_0)} = \frac{z-z_0}{-1}$.
Po dosazení dostáváme $\frac{x-1}{5} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1}$. Úlohu o nalezení normály lze řešit také tak, že z rovnice tečné roviny $5x + y - z - 3 = 0$ napíšeme normálový vektor $n = (5,1,-1)$. Pak vektorová rovnice normály v bodě $[1,0,2]$ je tvaru $[x,y,z] = [1,0,2] + t(5,1,-1), t \in R$. Tedyparametrické rovnice jsou $x = 1+5t, y = t, z = 2-t$. Vyloučením parametru t a porovnáním dostáváme opět vztah $\frac{x-1}{5} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1}$.

b) Spočteme parciální derivace funkce $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ v bodě $A = [2,1]$.
Platí $f'_x = \frac{2x}{x^2+y^2}, f'_x(A) = \frac{4}{5}, f'_y(A) = \frac{2y}{x^2+y^2}, f'_y(A) = \frac{2}{5}$.
Dopočítáme z-ovou souřadnici $z_0 = f(A) = \ln 5$. Provedeme dosazení do rovnice tečné roviny. Platí $z - \ln 5 = \frac{4}{5}(x-2) + \frac{2}{5}(y-1)$. Odtud plyne $4x + 2y = 5z - 5(2 - \ln 5) = 0$. Nyní nalezneme rovnici normály. Platí $\frac{5(x-2)}{4} = \frac{5(y-1)}{2} = \frac{z-\ln 5}{-1}$.

Příklad 5.4. Spočtěte Taylorův polynom $T_1(x,y)$ funkce $f(x,y) = \ln(7x-3y)$ v bodě $A = [1,2]$.

Řešení. Určíme potřebné parciální derivace funkce $f(x,y) = \ln(7x-3y)$ v bodě $A = [1,2]$.
Platí $f'_x = \frac{7}{7x-3y}, f'_x(A) = 7, f'_y = \frac{-3}{7x-3y}, f'_y(A) = -3$.
Dále $\mathrm{d}x = x - 1$ a $\mathrm{d}y = y - 2$.

Diferenciál funkce f v bodě A je tvaru $\mathrm{d}_h f(A) = f'_x(A)\mathrm{d}x + f'_y(A)\mathrm{d}y = 7\mathrm{d}x - 3\mathrm{d}y = 7(x-1) - 3(y-2) = 7x - 3y - 1$. Provedeme dosazení do vzorce pro Taylorův polynom $T_1(x,y) = f(A) + \frac{1}{1!}\mathrm{d}_h f(A)$. Platí $f(A) = \ln 1 = 0$. Odtud $T_1(x,y) = 7x - 3y - 1$.

Příklad 5.5. Spočtěte Taylorův polynom $T_1(x,y)$ funkce $f(x,y) = \sqrt{\mathrm{e}^x + \sin 2y}$ v bodě $A = [0,0]$ a s jeho pomocí určete $\sqrt{\sqrt{\mathrm{e}} + \sin 1}$.

Řešení. Spočteme parciální derivace funkce $f(x,y) = \sqrt{\mathrm{e}^x + \sin 2y}$ v bodě $A = [0,0]$.
Platí $f'_x = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x+\sin 2y}}, f'_x(A) = \frac{1}{2}, f'_y = \frac{1}{2}\frac{2\cos 2y}{\sqrt{\mathrm{e}^x+\sin 2y}}, f'_y(A) = 1$.
Dále $\mathrm{d}x = x$ a $\mathrm{d}y = y$.

Diferenciál funkce f v bodě A má tvar $\mathrm{d}_h f(A) = f'_x(A)\mathrm{d}x + f'_y(A)\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\mathrm{d}x + \mathrm{d}y = \frac{x}{2} + y$. Dosadíme do vzorce pro Taylorův polynom $T_1(x,y) = f(A) + \frac{1}{1!}\mathrm{d}_h f(A)$. Platí $f(A) = \sqrt{\mathrm{e}^0 + \sin 0} = 1$. Odtud $T_1(x,y) = 1 + \frac{x}{2} + y$.

Nyní zřejmě $\sqrt{\sqrt{\mathrm{e}} + \sin 1} = f(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \approx T_1(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = 1 + \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{7}{4}$.

Příklad 5.6. Spočtěte Taylorův polynom $T_2(x,y)$ funkce $f(x,y) = x^y$ v bodě $A = [1,1]$.

Řešení. Určíme potřebné parciální derivace funkce $f(x,y) = x^y$ v bodě $A = [1,1]$.
Platí $f'_x = yx^{y-1}, f'_x(A) = 1, f'_y = \ln x \cdot x^y, f'_y(A) = 0$;
$f''_{xx} = y(y-1)x^{y-2}, f''_{xx}(A) = 0, f''_{xy} = x^{y-1} + y\ln x \cdot x^{y-1}, f''_{xy}(A) = 1, f''_{yy} = (\ln x)^2 x^y, f''_{yy}(A) = 0$.

Dále $\mathrm{d}x = x - 1$ a $\mathrm{d}y = y - 1$.

Odtud plyne, že diferenciály potřebné k sestavení Taylorova polynomu mají tvar $\mathrm{d}_h f(A) = f'_x(A)\mathrm{d}x + f'_y(A)\mathrm{d}y = x-1$, $\mathrm{d}^2_h f(A) = f''_{xx}(A)\mathrm{d}x^2 + 2f''_{xy}(A)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + f''_{yy}(A)\mathrm{d}y^2 = 2(x-1)(y-1)$. Diferenciály dosadíme do vztahu pro Taylorův polynom $T_2(x,y) = f(A) + \frac{1}{1!}\mathrm{d}_h f(A) + \frac{1}{2!}\mathrm{d}^2_h f(A)$ a upravíme. Platí $T_2(x,y) = xy - y + 1$.

Příklad 5.7. Spočtěte Taylorův polynom $T_2(x,y)$ funkce $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ v bodě $A = [3,4]$ a s jeho pomocí určete $\sqrt{(2.98)^2 + (4.05)^2}$.

Řešení. Určíme potřebné parciální derivace funkce $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ v bodě $A = [3,4]$.

$f'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $f'_x(A) = \frac{3}{5}$, $f'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $f'_y(A) = \frac{4}{5}$, $f''_{xx} = \frac{y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$, $f''_{xx}(A) = \frac{16}{125}$, $f''_{xy} = \frac{-xy}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$, $f''_{xy}(A) = -\frac{12}{125}$, $f''_{yy} = \frac{x^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$, $f''_{yy}(A) = \frac{9}{125}$. Dále platí $\mathrm{d}x = x-3$ a $\mathrm{d}y = y-4$. Odtud plyne, že diferenciály potřebné k sestavení Taylorova polynomu mají tvar $\mathrm{d}_h f(A) = f'_x(A)\mathrm{d}x + f'_y(A)\mathrm{d}y = \frac{3}{5}(x-3) + \frac{4}{5}(y-4)$, $\mathrm{d}^2_h f(A) = f''_{xx}(A)\mathrm{d}x^2 + 2f''_{xy}(A)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + f''_{yy}(A)\mathrm{d}y^2 = \frac{16}{125}(x-3)^2 - \frac{24}{125}(x-3)(x-4) + \frac{9}{125}(y-4)^2$. Diferenciály dosadíme do vztahu pro Taylorův polynom $T_2(x,y) = f(A) + \frac{1}{1!}\mathrm{d}_h f(A) + \frac{1}{2!}\mathrm{d}^2_h f(A)$. Dostáváme $T_2(x,y) = 5 + \frac{3}{5}(x-3) + \frac{4}{5}(y-4) + \frac{16}{250}(x-3)^2 - \frac{24}{250}(x-3)(x-4) + \frac{9}{250}(y-4)^2$. Dále $\sqrt{2.98^2 + 4.05^2} \approx T_2(2.98, 4.05) = 5 + 0.028 + 0.0002116 = 5.0282116$. Hodnota z kalkulačky je přibližně 5.028210417.

Příklad 5.8. Spočtěte Taylorův polynom $T_3(x,y)$ funkce $f(x,y) = \mathrm{e}^{x+y}$. v bodě $A = [1,-1]$.

Řešení. Parciální derivace funkce $f(x,y) = \mathrm{e}^{x+y}$ potřebné k určení diferenciálů nalezneme snadno. Platí $f = f'_x = f'_y = f''_{xx} = f''_{xy} = f''_{yy} = f'''_{xxx} = f'''_{xxy} = f'''_{xyy} = f'''_{yyy} = \mathrm{e}^{x+y}$. $f(A) = f'_x(A) = f'_y(A) = f''_{xx}(A) = f''_{xy}(A) = f''_{yy}(A) = f'''_{xxx}(A) = f'''_{xxy}(A) = f'''_{xyy}(A) = f'''_{yyy}(A) = 1$.
Dále platí $\mathrm{d}x = x - 1$ a $\mathrm{d}y = y + 1$.

Diferenciály mají tvar $\mathrm{d}_h f(A) = f'_x(A)\mathrm{d}x + f'_y(A)\mathrm{d}y = (x-1) + (y+1)$, $\mathrm{d}^2_h f(A) = f''_{xx}(A)\mathrm{d}x^2 + 2f''_{xy}(A)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + f''_{yy}(A)\mathrm{d}y^2 = (x-1)^2 + 2(x-1)(y+1) + (y+1)^2$, $\mathrm{d}^3_h f(A) = f'''_{xxx}(A)\mathrm{d}x^3 + 3f'''_{xxy}(A)\mathrm{d}x^2\mathrm{d}y + 3f'''_{xyy}(A)\mathrm{d}x\mathrm{d}y^2 + f'''_{yyy}(A)\mathrm{d}y^3 = (x-1)^3 + 3(x-1)^2(y+1) + 3(x-1)(y+1)^2 + (y+1)^3$.

Spočtené diferenciály dosadíme do vztahu pro Taylorův polynom $T_3(x,y) = f(A) + \frac{1}{1!}\mathrm{d}_h f(A) + \frac{1}{2!}\mathrm{d}^2_h f(A) + \frac{1}{3!}\mathrm{d}^3_h f(A)$. Odtud $T_3(x,y) = 1 + (x-1) + (x+1) + \frac{1}{2}[(x-1)^2 + 2(x-1)(y+1) + (y+1)^2] + \frac{1}{6}[(x-1)^3 + 3(x-1)^2(y+1) + 3(x-1)(y+1)^2 + (y+1)^3]$.

Příklad 5.9. Spočtěte Taylorův polynom $T_3(x,y)$ funkce $f(x,y) = \sin x \cos y$ v bodě $A = [0,0]$.

Řešení. Určíme potřebné parciální derivace funkce $f(x,y) = \sin x \cos y$ v bodě $A = [0,0]$.
$f'_x = \cos x \cos y$, $f'_x(A) = 1$, $f'_y = -\sin x \sin y$, $f'_y(A) = 0$, $f''_{xx} = -\sin x \cos y$;
$f''_{xx}(A) = 0$, $f''_{xy} = -\cos x \sin y$, $f''_{xy}(A) = 0$, $f''_{yy} = -\sin x \cos y$, $f''_{yy}(A) = 0$;
$f'''_{xxx} = -\cos x \cos y$, $f'''_{xxx}(A) = -1$, $f'''_{xxy} = \sin x \sin y$, $f'''_{xxy}(A) = 0$, $f'''_{xyy} = -\cos x \cos y$, $f'''_{xyy}(A) = -1$, $f'''_{yyy} = \sin x \sin y$, $f'''_{yyy}(A) = 0$.
Dále platí $\mathrm{d}x = x$ a $\mathrm{d}y = y$.

Diferenciály potřebné k sestavení Taylorova polynomu mají tvar $\mathrm{d}_h f(A) = f'_x(A)\mathrm{d}x + f'_y(A)\mathrm{d}y = 1 \cdot x + 0 \cdot y = x$, $\mathrm{d}^2_h f(A) = f''_{xx}(A)\mathrm{d}x^2 + 2f''_{xy}(A)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + f''_{yy}(A)\mathrm{d}y^2 = 0 \cdot x^2 + 0 \cdot xy + 0 \cdot y^2 = 0$, $\mathrm{d}^3_h f(A) = f'''_{xxx}(A)\mathrm{d}x^3 + 3f'''_{xxy}(A)\mathrm{d}x^2\mathrm{d}y + 3f'''_{xyy}(A)\mathrm{d}x\mathrm{d}y^2 + f'''_{yyy}(A)\mathrm{d}y^3 = -1 \cdot x^3 + 3 \cdot 0 \cdot x^2 y + 3(-1)xy^2 + 0 \cdot y^3 = -x^3 - 3xy^2$.

Dosadíme do vztahu pro Taylorův polynom $T_3(x,y) = f(A) + \frac{1}{1!}\mathrm{d}_h f(A) + \frac{1}{2!}\mathrm{d}^2_h f(A) + \frac{1}{3!}\mathrm{d}^3_h f(A)$.

Platí $T_3(x,y) = x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}xy^2$.

Příklad 5.10. Spočtěte Taylorův polynom $T_3(x,y)$ funkce $f(x,y) = \mathrm{e}^x \sin y$ v bodě $A = [0,0]$.

Řešení. Určíme potřebné parciální derivace funkce $f(x,y) = \mathrm{e}^x \sin y$ v bodě $A = [0,0]$.
$f'_x = \mathrm{e}^x \sin y$, $f'_x(A) = 0$, $f'_y = \mathrm{e}^x \cos y$, $f'_y(A) = 1$;

$f''_{xx} = \mathrm{e}^x \sin y, f''_{xx}(A) = 0,\ f''_{xy} = \mathrm{e}^x \cos y, f''_{xy}(A) = 1, f''_{yy} = -\mathrm{e}^x \sin y, f''_{yy}(A) = 0;$
$f'''_{xxx} = \mathrm{e}^x \sin y,\ f'''_{xxx}(A) = 0, f'''_{xxy} = \mathrm{e}^x \cos y, f'''_{xxy}(A) = 1, f'''_{xyy} = -\mathrm{e}^x \sin y, f'''_{xyy}(A) = 0,\ f'''_{yyy} =$
$= -\mathrm{e}^x \cos y, f'''_{yyy}(A) = -1.$
Dále platí $\mathrm{d}x = x$ a $\mathrm{d}y = y$.

Odtud plyne, že diferenciály potřebné k sestavení Taylorova polynomu mají tvar $\mathrm{d}_h f(A) = f'_x(A)\mathrm{d}x + f'_y(A)\mathrm{d}y = 0 \cdot x + 1 \cdot y = y$, $\mathrm{d}_h^2 f(A) = f''_{xx}(A)\mathrm{d}x^2 + 2f''_{xy}(A)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + f''_{yy}(A)\mathrm{d}y^2 = 0 \cdot x^2 + 2 \cdot 1 \cdot xy + 0 \cdot y^2 = 2xy$, $\mathrm{d}_h^3 f(A) = f'''_{xxx}(A)\mathrm{d}x^3 + 3f'''_{xxy}(A)\mathrm{d}x^2\mathrm{d}y + 3f'''_{xyy}(A)\mathrm{d}x\mathrm{d}y^2 + f'''_{yyy}(A)\mathrm{d}y^3 = 0 \cdot x^3 + 3 \cdot 1 \cdot x^2 y + 3 \cdot 0 \cdot xy^2 + (-1) \cdot y^3 = 3x^2 y - y^3$.

Spočtené diferenciály dosadíme do vztahu pro Taylorův polynom $T_3(x, y) = f(A) + \frac{1}{1!}\mathrm{d}_h f(A) + \frac{1}{2!}\mathrm{d}_h^2 f(A) + \frac{1}{3!}\mathrm{d}_h^3 f(A)$.

Platí $T_3(x, y) = y + \frac{1}{2}(2xy) + \frac{1}{6}(3x^2 y - y^3) = y + xy + \frac{1}{2}x^2 y - \frac{1}{6}y^3$.