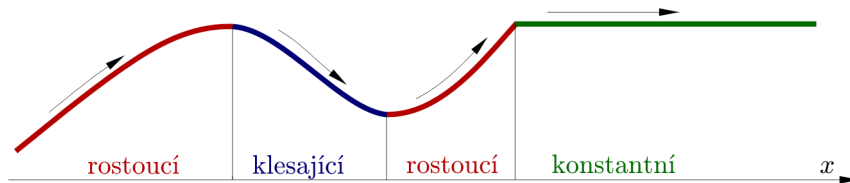


## 14. Monotonnost, lokální extrém, globální extrém a asymptoty funkce

### A. ROSTOUCÍ A KLESAJÍCÍ FUNKCE

Pojmy rostoucí, klesající a konstantní používáme k popisu chování funkce na nějakém intervalu (po kterém se pohybujeme zleva doprava, jak je přirozené). Intuitivní představu těchto pojmů si každý udělá z Obrázku 14.1.

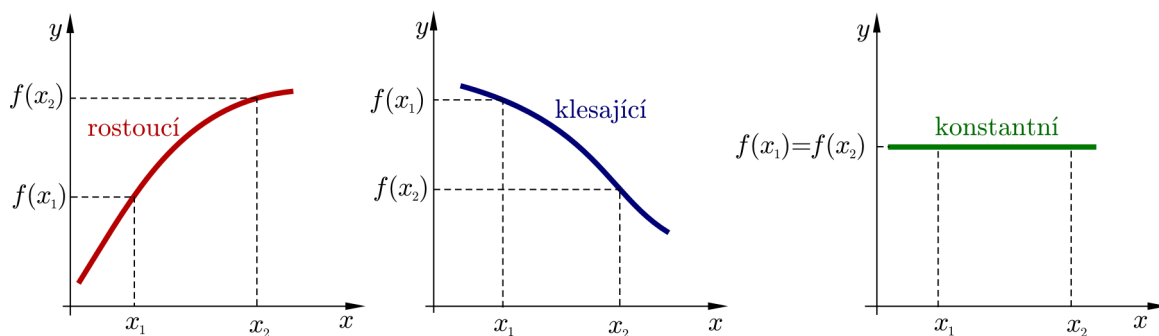


Obr. 14.1: Rostoucí, klesající a konstantní funkce

Nyní tyto pojmy definujme precizněji a definici ilustrujme na Obrázku 14.2.

**Definice 14.1.** Nechť funkce  $y = f(x)$  je definovaná na nějakém intervalu  $I$ . Nechť  $x_1, x_2$  jsou hodnoty z tohoto intervalu. Potom řekneme, že

- $f(x)$  je **rostoucí** na intervalu  $I$ , jestliže pro každé  $x_1 < x_2$  platí  $f(x_1) < f(x_2)$ .
- $f(x)$  je **klesající** na intervalu  $I$ , jestliže pro každé  $x_1 < x_2$  platí  $f(x_1) > f(x_2)$ .
- $f(x)$  je **konstantní** na intervalu  $I$ , jestliže pro libovolné  $x_1, x_2$  platí  $f(x_1) = f(x_2)$ .



Obr. 14.2: Růst a klesání — podle definice

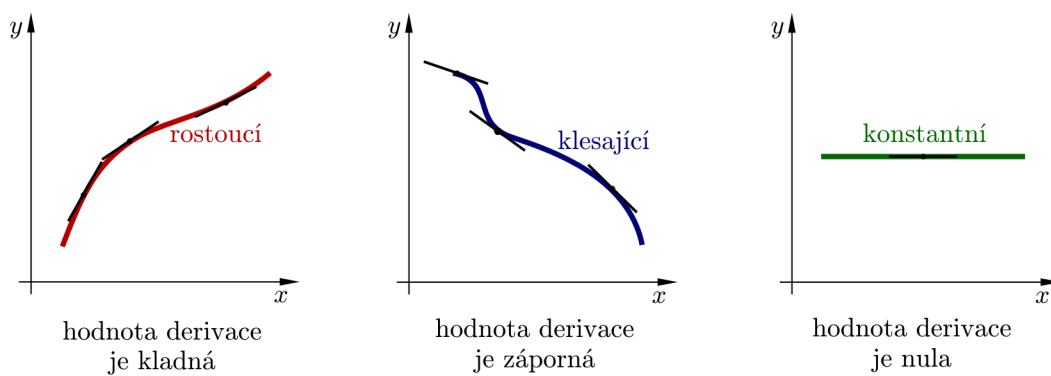
**Poznámka 14.2.** Nechť funkce  $y = f(x)$  je definovaná na nějakém intervalu  $I$ . Nechť  $x_1, x_2$  jsou hodnoty z tohoto intervalu. Potom řekneme, že

- $f(x)$  je **neklesající** na intervalu  $I$ , jestliže pro každé  $x_1 < x_2$  platí  $f(x_1) \leq f(x_2)$ .
- $f(x)$  je **nerostoucí** na intervalu  $I$ , jestliže pro každé  $x_1 < x_2$  platí  $f(x_1) \geq f(x_2)$ .

Podívejme se na funkci rostoucí, klesající a konstantní z hlediska derivací. Konkrétně nás budou zajímat znaménka derivací v bodech funkce. Hodnota derivace funkce  $y = f(x)$  v bodě  $x_0$  udává směrnici tečny ke grafu funkce  $y = f(x)$  v bodě  $x_0$ . Názorně je situace uvedena na Obrázku 14.3, a proto nás nepřekvapí následující věta.

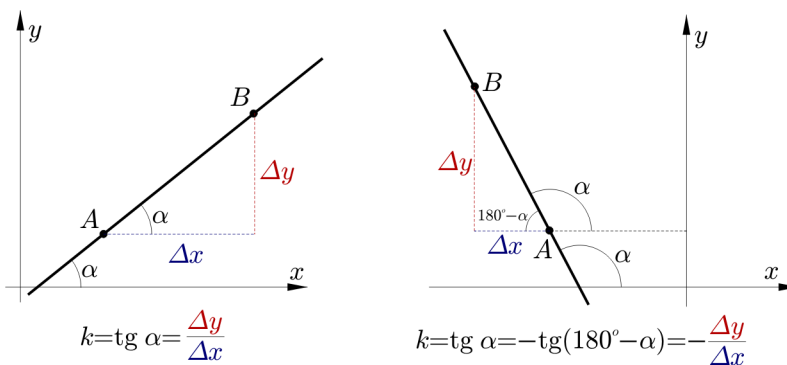
**Věta 14.3.** Nechť  $y = f(x)$  je funkce spojitá na uzavřeném intervalu  $\langle a, b \rangle$  a diferencovatelná na otevřeném intervalu  $(a, b)$ .

- a) Je-li  $f'(x) > 0$  pro všechna  $x \in (a, b)$ , potom je  $f(x)$  **rostoucí** na  $\langle a, b \rangle$ .
- a) Je-li  $f'(x) < 0$  pro všechna  $x \in (a, b)$ , potom je  $f(x)$  **klesající** na  $\langle a, b \rangle$ .
- a) Je-li  $f'(x) = 0$  pro všechna  $x \in (a, b)$ , potom je  $f(x)$  **konstantní** na  $\langle a, b \rangle$ .



Obr. 14.3: Růst a klesání — znaménka derivací

**Poznámka 14.4.** **Směrnice** přímky  $y = kx + q$  (tj. číslo  $k$ ) je definována jako tangenta úhlu  $\alpha$ , který tato přímka svírá s kladným směrem osy  $x$ . Hodnotu měřenou proti směru otáčení hodinových ručiček považujeme za kladnou, hodnotu měřenou po směru otáčení hodinových ručiček považujeme za zápornou. Tak například hodnoty  $210^\circ$  a  $-150^\circ$  udávají směr stejné přímky. Podívejte se na příklady na Obrázku 14.4.



Obr. 14.4: Směrnice přímky

**Příklad 14.5.** Určete intervaly, ve kterých jsou následující funkce rostoucí, a ve kterých jsou klesající. Namalujte nejprve obrázek, z něj vyčtete řešení a výsledek potvrďte výpočtem.

- a)  $f(x) = x^2 - 4x + 3$ ,
- b)  $f(x) = x^3$ .

*Řešení.* a) Z grafu funkce  $f(x)$  na Obrázku 14.15 vidíme, že funkce je klesající pro  $x \leq 2$  a rostoucí pro  $x \geq 2$ . Pro určení řešení výpočtem potřebujeme derivaci funkce  $f(x)$ , tj.

$$f'(x) = 2x - 4 = 2(x - 2).$$

Odtud vyplývá, že

$$f'(x) < 0 \quad \text{pro} \quad -\infty < x < 2, \quad \text{a proto podle Věty 14.3 je funkce klesající na } (-\infty, 2).$$

$$f'(x) > 0 \quad \text{pro} \quad 2 < x < \infty, \quad \text{a proto je funkce rostoucí na } (2, \infty).$$

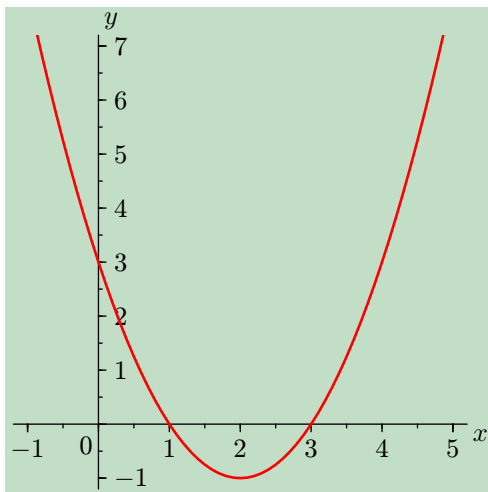
b) Z grafu funkce  $f(x)$  na Obrázku 14.13 vidíme, že funkce je rostoucí pro všechna  $x \in (-\infty, \infty)$ . Spočítáme derivaci funkce  $f(x)$ , tj.

$$f'(x) = 3x^2.$$

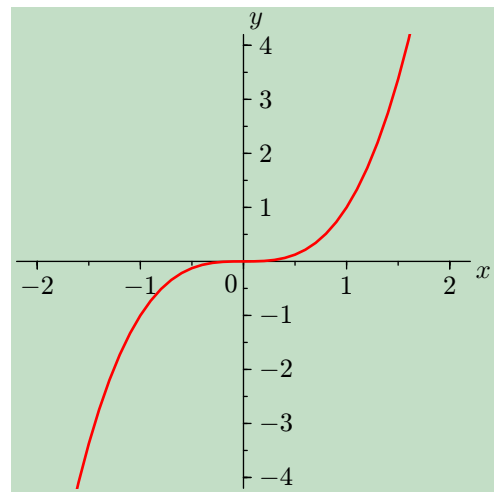
Odtud vyplývá, že

$$f'(x) > 0 \quad \text{pro} \quad -\infty < x < 0,$$

$$f'(x) > 0 \quad \text{pro} \quad 0 < x < \infty, \quad \text{a proto je funkce rostoucí na } (-\infty, \infty).$$



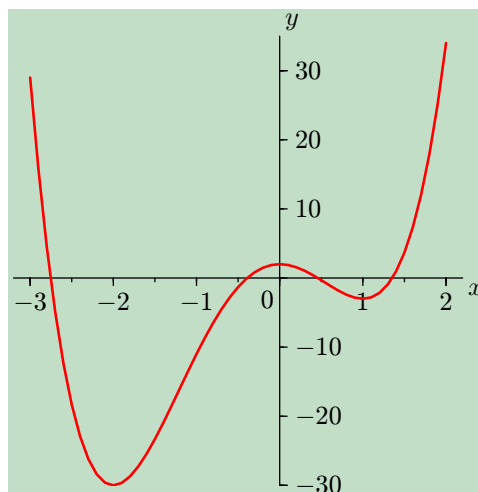
Obr. 14.5:  $f(x) = x^2 - 4x + 3$



Obr. 14.6:  $f(x) = x^3$

**Příklad 14.6.** a) Za pomoci grafu (viz Obrázek 14.16) funkce  $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 2$  odhadněte, ve kterých intervalech je funkce rostoucí a kdy klesající.  
b) Užitím Věty 14.3 potvrďte váš odhad.

*Řešení.* a) Z grafu funkce  $f(x)$  na Obrázku 14.16 vidíme, že funkce je klesající pro  $x \leq -2$ , rostoucí pro  $-2 \leq x \leq 0$ , klesající pro  $0 \leq x \leq 1$  a rostoucí pro  $x \geq 1$ .



Obr. 14.7:  $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 2$

b) Derivací funkčního předpisu dostáváme

$$f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 24x = 12x(x^2 + x - 2) = 12x(x+2)(x-1).$$

Analýzujeme nyní znaménka jednotlivých členů (tj. jednotlivých „závorek“) a odtud odvodíme znaménko pro  $f'(x)$ .

interval	$(12x)(x+2)(x-1)$	znaménko $f'(x)$	závěr
$x < -2$	$(-)(-)(-)$	-	$f(x)$ je na $(-\infty, -2)$ klesající
$-2 < x < 0$	$(-)(+)(-)$	+	$f(x)$ je na $(-2, 0)$ rostoucí
$0 < x < 1$	$(+)(+)(-)$	-	$f(x)$ je na $(0, 1)$ klesající
$x > 1$	$(+)(+)(+)$	+	$f(x)$ je na $(1, \infty)$ rostoucí

## B. LOKÁLNÍ EXTRÉMY FUNKCE

**Definice 14.7.** Řekneme, že funkce  $f$  má v bodě  $x_0 \in \mathbb{R}$  **lokální maximum** (resp. **lokální minimum**) právě když existuje ryzí okolí  $\mathcal{O}(x_0) - \{x_0\}$  takové, že  $\mathcal{O}(x_0) - \{x_0\} \subseteq D(f)$  a zároveň pro  $\forall x \in \mathcal{O}(x_0) - \{x_0\}$  platí  $f(x) \leq f(x_0)$ , resp.  $f(x) \geq f(x_0)$ .

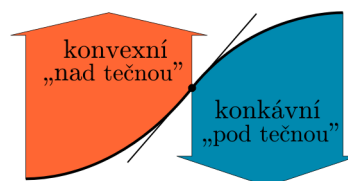
Analogicky definujeme **ostré lokální maximum**, pro které platí  $f(x) < f(x_0)$  a **ostré lokální minimum**, pro které platí  $f(x) > f(x_0)$ .

**Definice 14.8.** Necht' funkce  $f$  má v bodě  $x_0 \in \mathbb{R}$  derivaci  $f'(x_0)$ . Body, pro které platí  $f'(x_0) = 0$  nazveme **stacionární body**.

Jinými slovy můžeme říci, že stacionární body jsou body, podezřelé z extrému. Lokální extrém v nich nasat může, ale také nemusí. Bylo by jistě nepraktické, kdybychom lokální extrémy vyšetřovali pomocí funkčních hodnot v jejich ryzím okolí. Přesto je to možné, pokud si uvědomíme vazbu na růst a klesání funkce a tím pádem i na znaménko první derivace (tj.  $\text{sgn} f'(x)$ ). Velký pozor si ovšem musíme dát na body, ve kterých první derivace neexistuje. I to jsou potenciální adepti na extrém.

## C. KONVEXNÍ A KONKÁVNÍ FUNKCE

Znaménko derivace funkce  $f(x)$  nám prozradí, kde je graf funkce rostoucí a kde klesající. Ovšem nic nám neřekne o způsobu zakřivení. Podívejme se například na Obrázek 14.8. Graf je rostoucí vlevo i vpravo od vyznačeného bodu. Ovšem vlevo leží „nad tečnou“ a vpravo „pod tečnou“ sestrojenou v tomto bodě.



Obr. 14.8: Konvexní — „nad tečnou“, konkávní — „pod tečnou“

**Definice 14.9.** Leží-li graf funkce  $f(x)$  na nějakém okolí bodu  $B$  „nad tečnou“ sestrojenou v tomto bodě, řekneme, že  $f(x)$  je **konvexní** v bodě  $B$ .  
Leží-li graf funkce  $f(x)$  „pod tečnou“, řekneme, že  $f(x)$  je **konkávní** v bodě  $B$ .

Potřebujeme ovšem nějaký spolehlivý nástroj, který lze snadno použít při výpočtech. Ten nám dává následující věta.

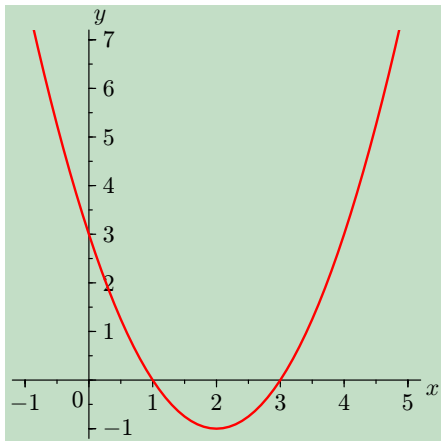
**Věta 14.10.** Nechť je funkce  $f(x)$  dvakrát diferencovatelná na nějakém intervalu  $I$ .

- a) Je-li  $f''(x) > 0$  na  $I$ , pak je  $f(x)$  **konvexní** na intervalu  $I$ .  
 b) Je-li  $f''(x) < 0$  na  $I$ , pak je  $f(x)$  **konkávní** na intervalu  $I$ .

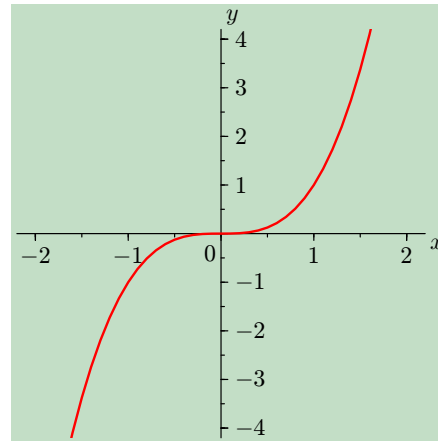
**Příklad 14.11.** Najděte intervaly, na kterých jsou funkce konvexní, a na kterých jsou konkávní.

- a)  $f(x) = x^2 - 4x + 3$ ,  
 b)  $f(x) = x^3$ ,  
 c)  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ .

*Řešení.* a) Výpočtem prvních dvou derivací získáme  $f'(x) = 2x - 4$  a  $f''(x) = 2$ . Vzhledem k tomu, že  $f''(x) > 0$  pro všechna  $x$ , je funkce  $f(x)$  konvexní na  $(-\infty, \infty)$ . To souhlasí se situací na Obrázku 14.15.



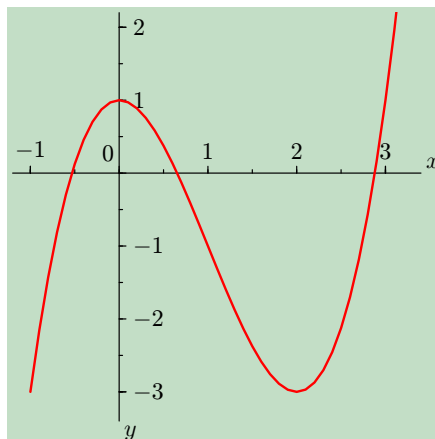
Obr. 14.9:  $f(x) = x^2 - 4x + 3$



Obr. 14.10:  $f(x) = x^3$

b) Výpočtem prvních dvou derivací získáme  $f'(x) = 3x^2$  a  $f''(x) = 6x$ . Vidíme, že  $f''(x) < 0$  pro  $x < 0$  a  $f''(x) > 0$  pro  $x > 0$ . Tedy funkce  $f(x)$  je konkávní na  $(-\infty, 0)$  a konvexní na  $(0, \infty)$ . To souhlasí se situací na Obrázku 14.13.

c) Výpočtem prvních dvou derivací získáme  $f'(x) = 3x^2 - 6x$  a  $f''(x) = 6x - 6 = 6(x - 1)$ . Vidíme, že  $f''(x) < 0$  pro  $x > 1$  a  $f''(x) > 0$  pro  $x < 1$ . Tedy funkce  $f(x)$  je konkávní na  $(-\infty, 1)$  a konvexní na  $(1, \infty)$ . To souhlasí se situací na Obrázku 14.14.



Obr. 14.11:  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

**Věta 14.12.** Nechť  $x_0$  je stacionární bod funkce  $f(x)$ .

1. Platí-li  $f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) > 0$ , pak je v bodě  $x_0$  ostré lokální minimum.
2. Platí-li  $f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) < 0$ , pak je v bodě  $x_0$  ostré lokální maximum.

#### D. GLOBÁLNÍ (ABSOLUTNÍ) EXTRÉMY FUNKCE

**Definice 14.13.** Nechť  $f(x)$  je funkce a  $M \subseteq D(f)$ . Jestliže existuje bod  $x_0 \in M$  tak, že pro všechna  $x \in M$  platí  $f(x) \leq f(x_0)$  (resp.  $f(x) \geq f(x_0)$ ), pak řekneme, že funkce  $f(x)$  nabývá v bodě  $x_0$  **globálního maxima** (resp. **globálního minima**) na množině  $M$ .

Někdy se místo pojmu globální minimum nebo maximum používá pojem absolutní minimum nebo maximum.

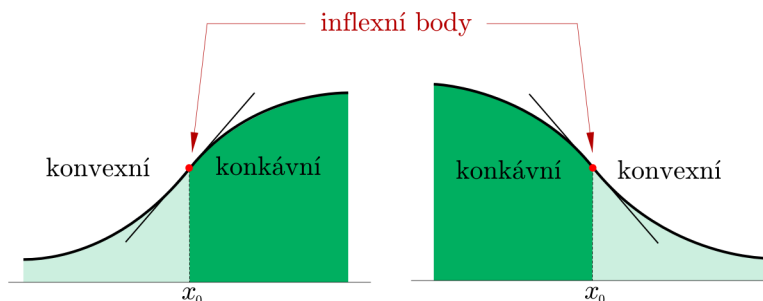
**Věta 14.14.** Je-li  $f(x)$  spojitá na  $\langle a, b \rangle$ , pak na  $\langle a, b \rangle$  nabývá globálních extrémů a to buď v bodech lokálních extrémů nebo v krajních bodech intervalu.

**Poznámka 14.15.** Při vyšetřování globálních extrémů na uzavřeném intervalu se postupuje tak, že vyšetříme nejprve lokální extrém a určíme i jejich funkční hodnoty. Tyto funkční hodnoty pak porovnáme s funkčními hodnotami v krajních bodech intervalu. Nejvyšší funkční hodnota určí bod, ve kterém nastává globální maximum a nejnižší funkční hodnota určí bod, ve kterém nastává globální minimum. Pozor, globální extrém může nastat současně ve více bodech.

#### E. INFLEXNÍ BODY

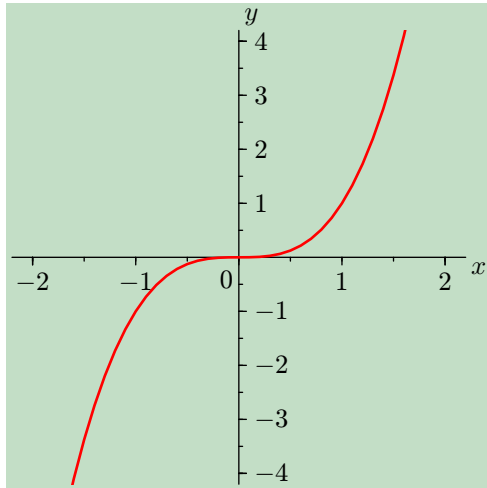
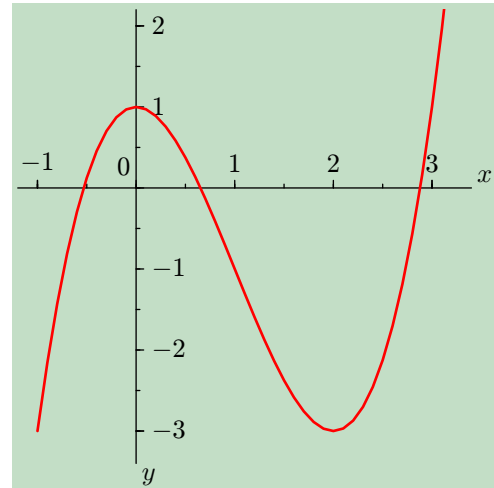
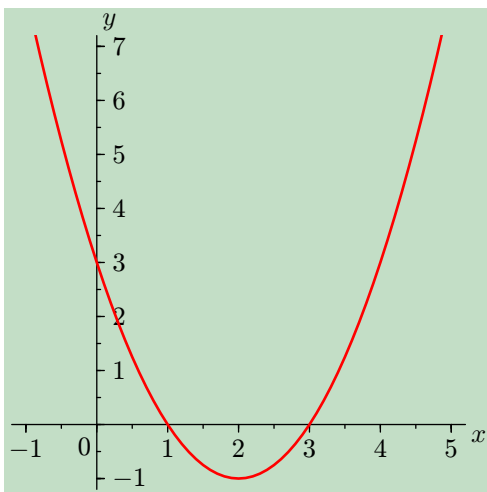
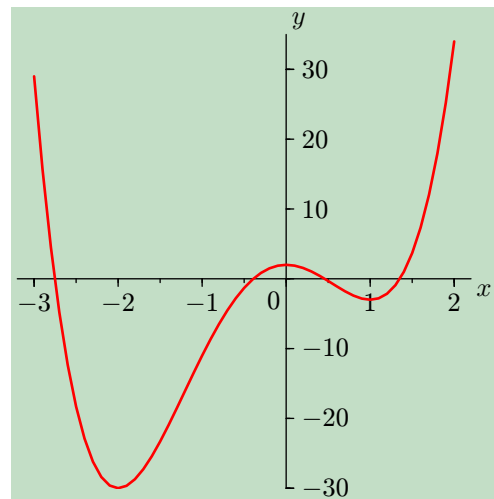
Bodům, ve kterých graf přechází z konvexního na konkávní a naopak, budeme věnovat zvláštní pozornost.

**Definice 14.16.** Přechází-li graf spojitě funkce  $f(x)$  v bodě  $B = [x_0, f(x_0)]$  z jedné strany tečny na druhou, říkáme, že  $f(x)$  má v bodě  $B$  (tj. pro  $x_0$ ) **inflexní bod**. Viz Obrázek 14.12.



Obr. 14.12: Inflexní body — podle definice

**Příklad 14.17.** Například funkce  $f(x) = x^3$  má inflexní bod pro  $x = 0$ , tj. v bodě  $[0, 0]$  (viz Obrázek 14.13). Funkce  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$  má inflexní bod pro  $x = 1$ , tj. v bodě  $[1, -1]$  (viz Obrázek 14.14). Funkce  $f(x) = x^2 - 4x + 3$  nemá žádné inflexní body (viz Obrázek 14.15).

Obr. 14.13:  $f(x) = x^3$ Obr. 14.14:  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ Obr. 14.15:  $f(x) = x^2 - 4x + 3$ Obr. 14.16:  $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 2$ 

**Příklad 14.18.** Použijte Obrázek 14.16 k hrubému odhadu souřadnic inflexních bodů funkce  $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 2$  a zkontrolujte své odhady výpočtem.

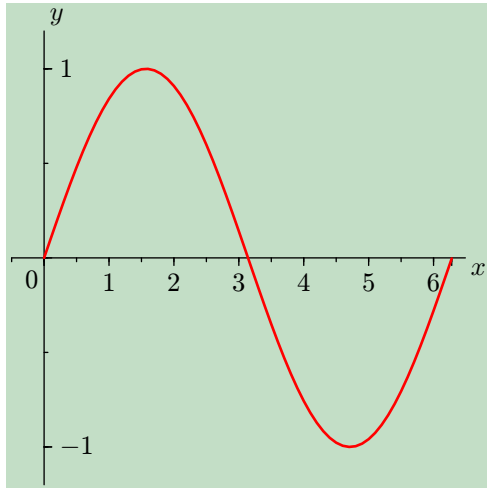
*Řešení.* Graf přechází z konvexního na konkávní někde mezi  $-2$  a  $-1$ , řekněme zhruba pro  $x = -1,25$  a z konkávního na konvexní někde mezi  $0$  a  $1$ , řekněme pro  $x = 0,5$ .

Pro přesný výpočet inflexního bodu potřebujeme druhou derivaci funkce  $f(x)$ .  $f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 24x$  a  $f''(x) = 36x^2 + 24x - 24 = 12(3x^2 + 2x - 2)$ . Položíme druhou derivaci rovnu nule, tj.  $3x^2 + 2x - 2 = 0$ . A zjistíme body, kde se mění funkce z konvexní na konkávní, nebo naopak. To nastává pro  $x = \frac{-1-\sqrt{7}}{3} \approx -1,22$  a pro  $x = \frac{-1+\sqrt{7}}{3} \approx 0,55$ . Pro úplnost výpočet doplníme tabulkou.

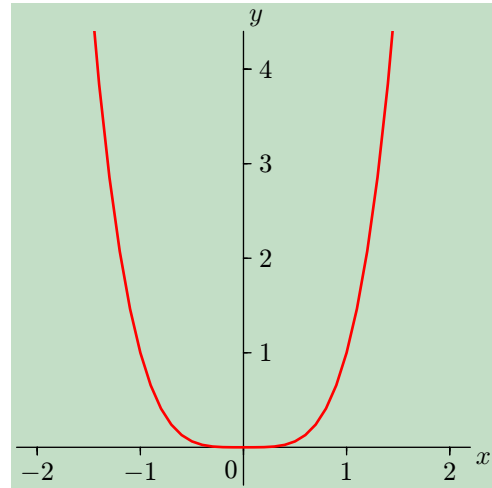
interval	znaménko $f''(x)$	závěr
$x < \frac{-1-\sqrt{7}}{3}$	+	$f(x)$ je na $(-\infty, \frac{-1-\sqrt{7}}{3})$ konvexní
$\frac{-1-\sqrt{7}}{3} < x < \frac{-1+\sqrt{7}}{3}$	-	$f(x)$ je na $(\frac{-1-\sqrt{7}}{3}, \frac{-1+\sqrt{7}}{3})$ konkávní
$x > \frac{-1+\sqrt{7}}{3}$	+	$f(x)$ je na $(\frac{-1+\sqrt{7}}{3}, \infty)$ konvexní

**Příklad 14.19.** Najděte inflexní bod funkce  $f(x) = \sin x$  na intervalu  $\langle 0, 2\pi \rangle$ . Na závěr výsledky porovnejte s grafem

*Řešení.* Výpočtem prvních dvou derivací obdržíme  $f'(x) = \cos x$  a  $f''(x) = -\sin(x)$ . Tedy  $f''(x) < 0$  pro  $0 < x < \pi$  a  $f''(x) > 0$  pro  $\pi < x < 2\pi$ . Což implikuje, že graf je konkávní pro  $0 < x < \pi$  a konvexní pro  $\pi < x < 2\pi$ , a tedy inflexní bod je pro  $x = \pi \approx 3,14$ , tj. v bodě  $[\pi, 0]$ . To souhlasí s Obrázkem 14.17.



Obr. 14.17:  $f(x) = \sin x, 0 \leq x \leq 2\pi$



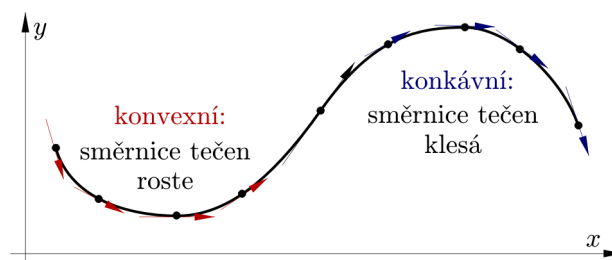
Obr. 14.18:  $f(x) = x^4$

**Poznámka 14.20.** V předchozích příkladech inflexní body funkce  $f(x)$  splňovaly podmínku  $f''(x) = 0$ . Pokaždé však z  $f''(x) = 0$  neplatí, že by v daném bodě musel být inflexní bod. Ukažme si to na následujícím příkladu.

**Příklad 14.21.** Najděte inflexní bod (pokud vůbec existuje) funkce  $f(x) = x^4$ .

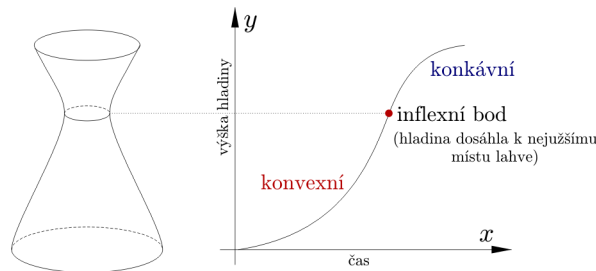
*Řešení.* Výpočtem prvních dvou derivací obdržíme  $f'(x) = 4x^3$  a  $f''(x) = 12x^2$ . Tedy  $f''(x) > 0$  pro každé  $x \in (-\infty, \infty)$ , proto je funkce konvexní na  $(-\infty, \infty)$  a tudíž nemá žádné inflexní body. Upozorníme na skutečnost, že pro  $x = 0$  sice platí, že  $f''(x) = 0$ , ale o inflexní bod nejde, viz Obrázek 14.18.

Dosud jsme o inflexních bodech mluvili jen v souvislosti se změnou funkce z konvexní na konkávní a naopak. Uvědomme si, že inflexní body jsou body na křivce, ve kterých se mění směrnice tečen. Je-li funkce konvexní, směrnice, tečen narůstá a je-li konkávní, tak směrnice tečen klesá. (Viz Obrázek 14.19.) Ukažme si to na příkladu z fyziky.



Obr. 14.19: Konvexní a konkávní podle směrnic tečen

**Příklad 14.22.** Předpokládejme, že voda je nalitá do lahve, která má tvar jako na Obrázku 14.20 a její objem narůstá konstantní rychlostí. Pozorujme, jak při této rychlosti narůstá výška hladiny  $y$  vzhledem k času  $t$ . Zpočátku se bude výška hladiny  $y$  zvyšovat pomalu, protože láhev má širokou podstavu. Se zužováním láhve se bude výška hladiny  $y$  zvyšovat rychleji až do nejužšího místa, kterým je hrdlo. Od té chvíle se bude výška hladiny  $y$  zvyšovat pomaleji, protože se láhev opět rozšiřuje. Tudíž hrdlo je bodem, ve kterém se mění rychlost změny výšky hladiny  $y$  v závislosti na čase  $t$  z rostoucí na klesající.



Obr. 14.20: Výška hladiny v láhvi v závislosti na čase

Při vyšetřování průběhu funkce je třeba mít v ruce snadný rozhodovací aparát. Tím je následující věta.

**Věta 14.23.** Je-li  $f''(x_0) = 0 \wedge f'''(x_0) \neq 0$ , pak je  $x_0$  inflexní bod.

Poznamenejme, že inflexní body může funkce  $f(x)$  mít buď v bodech, kde  $f''(x_0) = 0$  nebo v bodech, kde  $f''(x)$  neexistuje.

## F. ASYMPTOTY

Názorně si pod pojmem asymptota představujeme přímku, ke které se graf funkce  $f(x)$  nekonečně blíží. Při bližším pohledu si uvědomíme, že tyto přímky můžeme rozdělit na dva případy:

1. Buď přímka, která je asymptotou směrnicí nemá (např. asymptoty funkce  $f(x) = \operatorname{tg} x$ ).
2. Nebo přímka asymptotu má (například u hyperboly).

**Poznámka 14.24.** Přímka, která směrnicí nemá (tj. přímka bez směrnice) má rovnici  $x = x_0$ , kde  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Graf přímky bez směrnice je přímka kolmá k ose  $x$  (tzn. je rovnoběžná s osou  $y$ ).

**Definice 14.25.** Přímka  $x = x_0$  se nazývá **asymptota bez směrnice** právě když funkce  $f(x)$  má nevlastní limitu (tj.  $\pm\infty$ ) v bodě  $x_0$  zleva nebo zprava.

**Poznámka 14.26.** Body na ose  $x$ , které jsou podezřelé z toho, že jimi prochází asymptota bez směrnice jsou body vyřazené z definičního oboru  $D(f)$ . Například je-li pro nějakou funkci  $f(x)$  definičním oborem  $D(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$ , pak při vyšetřování asymptot bez směrnice počítáme tyto dvě jednostranné limity

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \dots,$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \dots$$

Pokud alespoň jedna z nich vyjde  $+\infty$  nebo  $-\infty$ , pak je přímka  $x = -2$  asymptotou bez směrnice.

**Poznámka 14.27.** Asymptot bez směrnice může být nekonečně mnoho, viz graf funkce  $f(x) = \operatorname{tg} x$ .

**Definice 14.28.** Nechť  $u$  je přímka, která není rovnoběžná s osou  $y$ . Nechť  $d(x)$  značí vzdálenost bodu  $[x, f(x)]$  od této přímky. Řekneme, že přímka  $u$  je **asymptota se směrnicí** právě když  $\lim_{x \rightarrow \infty} d(x) = 0$  nebo  $\lim_{x \rightarrow -\infty} d(x) = 0$ .

**Poznámka 14.29.** Libovolná funkce  $f(x)$  může mít maximálně dvě asymptoty se směrnicí.

Při vyšetřování asymptot se směrnicí u funkce  $f(x)$  hledáme ve skutečnosti přímku  $y = kx + q$ . Při výpočtu směrnice a posunutí využijeme následující tvrzení.

**Věta 14.30.** Přímky  $y = k_1x + q_1$  a  $y = k_2x + q_2$  jsou asymptotou se směrnicí funkce  $f(x)$  právě když existují vlastní čísla  $k_{1,2}$  a  $q_{1,2}$  (tj. čísla různá od  $\pm\infty$ ) taková, že platí

$$k_{1,2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad (14.1)$$

a

$$q_{1,2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - k_{1,2}x \quad (14.2)$$