18. Primitivní funkce, neurčitý integrál, základní integrály

A. Základní pojmy

Definice 18.1. Říkáme, že $F(x)$ je v intervalu (a, b) **primitivní funkcí** k funkce $f(x)$, jestliže pro všechna $x \in (a, b)$ platí $F'(x) = f(x)$.

Věta 18.2. Ke každé funkci $f(x)$ spojité na (a, b) existuje v (a, b) primitivní funkce. Je jich dokonce nekonečně mnoho. Je-li $F(x)$ jedna z nich, pak všechny ostatní mají tvar

$$F(x) + C,$$

kde C je **integrační konstanta**, která je libovolná.

Poznámka 18.3. Používáme formální zápis

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C,$$

$\int f(x)\,\mathrm{d}x$ znamená *množinu* všech primitivních funkcí k funkce $f(x)$ a nazývá se **neurčitý integrál funkce** $f(x)$.

Poznámka 18.4. Je zvykem pracovat se symbolem $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ jako s jednou z primitivních funkcí a ve výsledku připsat integrační konstantu C.

Platí: $(F(x) + C)' = f(x) \Leftrightarrow F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x$.

Příklad 18.5. $(\sin x + 5)' = \cos x$; $(\sin x - 6)' = \cos x$. Tedy $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$.

Věta 18.6. Přehled základních integračních vzorců

1. $\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad x > 0, n \in \mathbf{R}, \mathrm{n} \neq -1.$
2. $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C, \quad x \neq 0.$
3. $\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C.$
4. $\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, a \neq 1.$
5. $\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C.$
6. $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C.$
7. $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{cotg}\,x + C, \quad x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}.$
8. $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{tg}\,x + C, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$
9. $\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{arctg}\,x + C_1 = -\mathrm{arccotg}\,x + C_2.$
10. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin x + C_1 = -\arccos x + C_2, \quad x \in (-1, 1).$
11. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,\mathrm{d}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+a}\right) + C, \quad a > 0.$
12. $\int \frac{1}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0.$
13. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)|.$

Poznámka 18.7. Přestože ke každé spojité funkci existuje primitivní funkce, nelze v mnoha případech tuto primitivní funkci vyjádřit pomocí elementárních funkcí.

B. Integrační metody

Věta 18.8. Existují-li k funkcím $f_1(x), f_2(x), f(x)$ primitivní funkce, pak

1. $\int (f_1(x) \pm f_2(x))\,\mathrm{d}x = \int f_1(x)\,\mathrm{d}x \pm \int f_2(x)\,\mathrm{d}x$.
2. $\int k \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = k \int f(x)\,\mathrm{d}x$, kde k je konstanta.

Jednou z integračních metod je **přímá integrace**.

Příklad 18.9. Spočtěte integrály:

1. $\int \frac{5x^2-3}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.
2. $\int \left(3x^2 - 2x + \frac{1}{\sqrt{x^3}}\right)\mathrm{d}x$.
3. $\int \frac{3^x \cos^2 x - 5}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.
4. $\int \operatorname{cotg} x\,\mathrm{d}x$.
5. $\int \frac{\sqrt{x^4+2+x^{-4}}}{x^3}\,\mathrm{d}x$.
6. $\int \frac{1}{x \ln x}\,\mathrm{d}x$.
7. $\int x(x-2)(x-3)\,\mathrm{d}x$.

Další možností je řešení integrálů **substituční metodou**. Tu si ukážeme na následujících příkladech.

Příklad 18.10.

1. $\int \cos(5x+6)\,\mathrm{d}x$.
2. $\int \frac{1}{x \ln x}\,\mathrm{d}x$.
3. $\int \sin^2 x \cos x\,\mathrm{d}x$.
4. $\int x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$.
5. $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.
6. $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{1+2\cos x}}\,\mathrm{d}x$.
7. $\int \frac{1}{x\sqrt{3-\ln^2 x}}\,\mathrm{d}x$.

Poznámka 18.11. Počítáme-li integrály $\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x$, $\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x$, tak před vlastní integrací nejprve použijeme úpravu:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

Příklad 18.12. $\int \sin^2 x \, \mathrm{d}x$.

Velmi užitečná je i integrace **per partes**.

Věta 18.13. Metoda per partes (po částech)
Mají-li funkce $u(x)$ a $v(x)$ v intervalu (a, b) spojitou derivaci, pak v intervalu (a, b) platí

$$\int u(x) \cdot v'(x) \, \mathrm{d}x = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) \, \mathrm{d}x. \tag{18.1}$$

Důkaz. Stačí si uvědomit, jak se derivuje součin funkcí $u \cdot v$:
$(u \cdot v)' = u'v + uv'$. Nyní obě strany rovnice zintegrujeme:
$\int (u \cdot v)' \, \mathrm{d}x = \int u'v \, \mathrm{d}x + \int uv' \, \mathrm{d}x$. Odtud:
$u \cdot v = \int u'v \, \mathrm{d}x + \int uv' \, \mathrm{d}x$, což je dokazované tvrzení.

Poznámka 18.14. Z důkazu je jasně vidět, že integrace per partes může být zapsána v ekvivalentním tvaru

$$\int u'(x) \cdot v(x) \, \mathrm{d}x = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x) \, \mathrm{d}x.$$

Poznámka 18.15. Typické příklady, kdy je vhodné použít integraci per partes ($p_n(x)$ je polynom stupně n). Značení používáme ze vztahu (18.1):

$$\left.\begin{array}{l} \int p_n(x) \cdot \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x, \\ \int p_n(x) \cdot \sin x \, \mathrm{d}x, \\ \int p_n(x) \cdot \cos x \, \mathrm{d}x, \end{array}\right\} \text{zde volíme za funkci „kterou budeme derivovat“ polynom } p_n(x) = v(x).$$

$$\left.\begin{array}{l} \int p_n(x) \cdot \ln x \, \mathrm{d}x, \\ \int p_n(x) \cdot \arcsin x \, \mathrm{d}x, \\ \int p_n(x) \cdot \mathrm{arctg}\, x \, \mathrm{d}x, \end{array}\right\} \text{zde volíme za funkci „kterou budeme integrovat“ polynom } p_n(x) = u'(x).$$

Příklad 18.16.

1. $\int (1 + x)\mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$.
2. $\int x\mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x$.
3. $\int \mathrm{arctg}\, x \, \mathrm{d}x$.
4. $\int \ln x \, \mathrm{d}x$.
5. $\int \cos(\ln x) \, \mathrm{d}x$.

Pokud integrujeme **racionálně lomenou funkci** $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, pak ji nejprve převedeme na parciální zlomky a ty již snadno zintegrujeme.

Příklad 18.17.

1. $\int \frac{x^4+6x^2+x-2}{x^4-2x^3} \, \mathrm{d}x$.
2. $\int \frac{x}{(x-1)(x+1)^2} \, \mathrm{d}x$.
3. $\int \frac{5}{(2x-3)^7} \, \mathrm{d}x$.
4. $\int \frac{11x^2+2x-33}{x^2-3} \, \mathrm{d}x$.

Integrujeme-li **goniometrické funkce**, tj. $\int R(\sin x, \cos x)$, pak nejčastěji postupujeme substitucí. O vhodné volbě substituce rozhodneme až u konkrétního příkladu. Určitá pravidla ovšem platí obecně:

$R(\sin^n x, \cos^m x)$, kde m je sudé číslo a n je liché číslo ... substituce $\sin x = t$;
$R(\sin^n x, \cos^m x)$, kde m je liché číslo a n je sudé číslo ... substituce $\cos x = t$; Ve všech případech
$R(\sin^n x, \cos^m x)$, kde m je liché číslo a n je liché číslo ... substituce $\operatorname{tg} x = t$.
lze využít tzv. univerzální substituci $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$.

Příklad 18.18.

1. $\int \sin^3 x \, \mathrm{d}x$;
2. $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^4 x} \, \mathrm{d}x$;
3. $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + 2\cos x} \, \mathrm{d}x$;
4. $\int \frac{2 - \sin x}{2 + \cos x} \, \mathrm{d}x$.