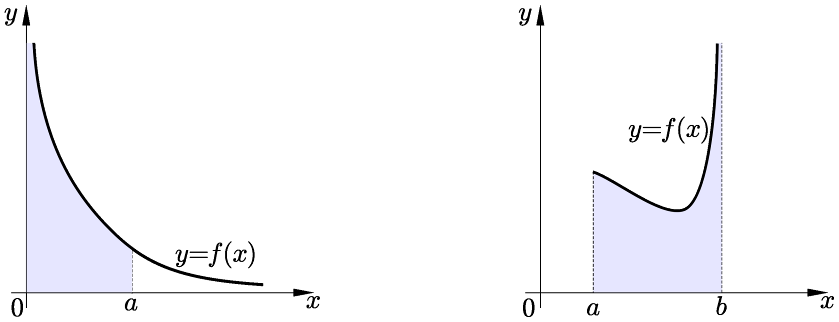
20. Nevlastní integrál

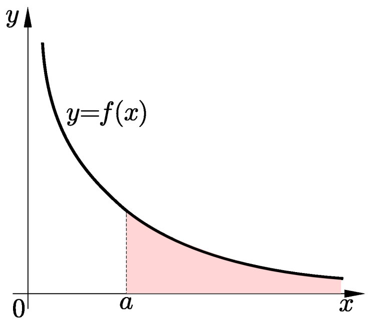
Poznámka 20.1. Dosud jsme se zabývali Riemannovým integrálem, který je definován pro ohraničenou funkci $f(x)$ na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$. Tento určitý integrál jsme zapisovali $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Nyní potřebujeme vyřešit, jak definovat:

a) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, kde funkce $f(x)$ není ohraničená. Viz Obrázek 20.1.



Obr. 20.1: Nevlastní integrál vlivem funkce

b) $\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ nebo $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$, tj. integrál z funkce na otevřeném intervalu. Viz Obrázek 20.2.



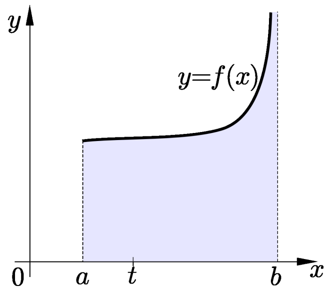
Obr. 20.2: Nevlastní integrál vlivem meze

A. Nevlastní integrál vlivem funkce

Definice 20.2. Nechť funkce $f(x)$ je integrovatelná v každém intervalu $\langle a, t\rangle$ kde $a < t < b$ a nechť je $f(x)$ neohraničená v levém okolí bodu b (viz Obrázek 20.3). Existuje-li vlastní limita $\lim\limits_{t\to b^-} \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$, říkáme, že **integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje**. Pak pokládáme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{20.1}$$

Pokud limita $\lim\limits_{t\to b^-} \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$ neexistuje nebo je nevlastní, pak říkáme, že **integrál diverguje**



Obr. 20.3: Funkce neohraničená v levém okolí bodu b

Poznámka 20.3. Bodu b, pro který platí, že v jeho levém okolí je funkce $f(x)$ neohraničená a $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje říkáme **singulární bod**.

Poznámka 20.4. Je-li singulárním bodem bod a(tj. $f(x)$ je neohraničená v pravém okolí bodu a a $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje), je definice analogická a píšeme

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to a^+} \int\limits_t^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{20.2}$$

Příklad 20.5. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

Příklad 20.6. $\int_0^1 x \ln x\,\mathrm{d}x$.

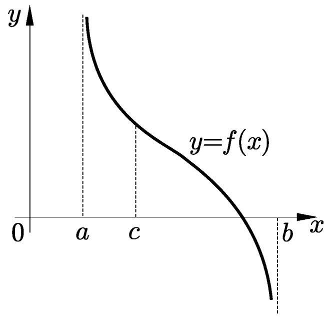
Poznámka 20.7. Pokud jsou oba krajní body intervalu $\langle a,b\rangle$ singulární a funkce $f(x)$ je integrovatelná na (a,b), pak rozdělíme interval libovolným bodem c (viz Obrázek 20.4) a spočteme

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to a^+} \int_t^c f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{t\to b^-} \int_c^t f(x)\,\mathrm{d}x.$$

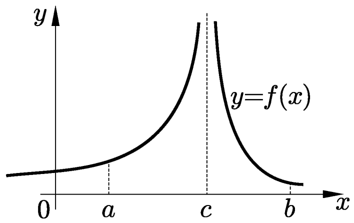
Poznámka 20.8. Pokud se singularita vyskytne uvnitř intervalu $\langle a,b\rangle$, pak integrál rozdělíme právě v tomto bodě c (viz Obrázek 20.5) a spočítáme

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to c^-} \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{t\to c^+} \int_t^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Příklad 20.9. $\int_{-1}^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.



Obr. 20.4: Funkce se singularitami v obou krajních bodech



Obr. 20.5: Funkce se singularitou uvnitř

B. Nevlastní integrál vlivem meze

Definice 20.10. Nechť funkce $f(x)$ je integrovatelná v intervalu $\langle a, \infty)$ kde $a \in \mathbb{R}$. Existuje-li vlastní limita $\lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, říkáme, že **integrál** $\int\limits_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ **konverguje**. Pak pokládáme

$$\int\limits_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to+\infty} \int\limits_a^t f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{20.3}$$

Pokud limita $\lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ neexistuje nebo je nevlastní, pak říkáme, že **integrál diverguje**.

Poznámka 20.11. Je-li singularita v dolní mezi, je definice analogická a platí

$$\int\limits_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to-\infty} \int\limits_t^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{20.4}$$

Poznámka 20.12. Pokud jsou singulární body v horní i v dolní mezi, pak interval rozdělíme bodem c a píšeme

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\underset{\cdot}{x} = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c}^{\infty} f(x)\underset{\cdot}{x} = \lim_{t\to-\infty} \int_t^c f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{t\to+\infty} \int_c^t f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Příklad 20.13. $\int_2^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Příklad 20.14. $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

Příklad 20.15. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.