15. Průběh funkce

Při vyšetření grafu funkce budeme postupovat podle následujícího algoritmu:

1. Určení definičního oboru.
2. Rozhodnutí, jestli je funkce sudá, lichá, periodická nebo nemá ani jednu z uvedených vlastností.
3. Nalezení průsečíků s osou x (tzv. nulové body) a určení znaménka $f(x)$.
4. Výpočet limit pro x jdoucí k $\pm\infty$.
5. První derivace funkce:
   a) Nalezení stacionárních bodů (tj. bodů podezřelých z extrémů).
   b) Nalezení intervalů, kde je funkce rostoucí, nebo klesající.
   c) Nalezení lokálních extrémů.
6. Druhá derivace funkce:
   a) Nalezení intervalů, kde je funkce konkávní, nebo konvexní.
   b) Nalezení inflexních bodů.
7. Vyšetření asymptot:
   a) Bez směrnice, tj. přímek $x = x_0$, kde x_0 jsou případné body nespojitosti.
   b) Se směrnicí, tj. přímek $y = kx + q$.
8. Načrtnutí grafu.

Proveďme stručnou rekapitulaci pojmů a upozorněme na úskalí, která mohou nastat.

Definiční obor. Správné určení definičního oboru je nezbytné. Body, které „vyřadíme“ z definičního oboru jsou horkými kandidáty na to, že jimi bude procházet asymptota bez směrnice.

Sudá, lichá, nebo periodická funkce. Potvrzení některé z těchto vlastností nám výrazně usnadní vykreslení průběhu funkce, protože budeme vědět o určité symetričnosti. Připomeňme, že funkce:

- **sudá** má graf osově souměrný podle osy y a platí $f(-x) = f(x)$ pro všechna $x \in D(f)$.
- **lichá** má graf středově souměrný podle počátku a platí $f(-x) = -f(x)$ pro všechna $x \in D(f)$.
- **periodická** s periodou p splňuje pro všechna $x \in D(f)$ podmínku $f(x) = f(x + p)$.

Nulové body a průsečík s osou y. Body na ose x mají y-ovou souřadnici rovnu nule. Stačí tedy vyřešit rovnici $f(x) = 0$.

Abychom věděli, kdy bude graf funkce $f(x)$ probíhat pod osou x a nad ní, potřebujeme určit znaménko $f(x)$ (tzv. sgn $f(x)$).

Výpočet limit pro x jdoucí k $\pm\infty$. Počítáme $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

První derivace, stacionární body, monotonnost, extrémy. Připomeňme nejprve geometrický význam derivace funkce $f(x)$ v bodě x_0 - číslo $f'(x_0)$ je směrnice tečny ke grafu funkce $f(x)$ v bodě x_0. Jestliže sestrojíme tečnu ke grafu funkce f v jejím lokálním extrému (tj. v lokálním minimu nebo lokálním maximu), tato tečna bude rovnoběžná s osou x a tudíž její směrnice bude rovna **nule**. Hledání extrémů odpovídá nalezení bodů, ve kterých je směrnice tečny ke grafu rovna nule. **Stacionární body** (tj. body podezřelé z extrémů) jsou jsou kořeny rovnice:

$$f'(x) = 0$$

Pozor, ne každý bod, kde směrnice tečny je rovna nule musí být extrém. Ještě stále může jít o tzv. inflexní bod, což je bod, kde se průběh funkce mění z konvexního na konkávní nebo naopak.

Pozor, ne všechny lokální extrémy „zachytíme“ tím, že položíme $f'(x) = 0$. Je třeba si pohlídat body, ve kterých první derivace vůbec neexistuje!

O tom, jestli je stacionární bod bodem lokálního minima, lokálního maxima, nebo inflexním bodem rozhodneme podle intervalů, na kterých funkce roste, nebo klesá.

- **Funkce rostoucí** na nějakém intervalu splňuje podmínku, že $f'(x) > 0$ pro všechna x z tohoto intervalu.
- **Funkce klesající** na nějakém intervalu splňuje podmínku, že $f'(x) < 0$ pro všechna x z tohoto intervalu.

Proto nás bude zajímat znaménko první derivace (tzv. sgn $f'(x)$).

Druhá derivace, konvexnost, konkávnost, inflexní body.

- **Funkce konvexní** leží v daném intervalu „nad tečnou“ a platí $f''(x) > 0$ pro všechna x z tohoto intervalu.
- **Funkce konkávní** leží v daném intervalu „pod tečnou“ a platí $f''(x) < 0$ pro všechna x z tohoto intervalu.

Proto nás bude zajímat znaménko druhé derivace (tzv. sgn $f''(x)$).

- **Inflexní bod** je bod, pro který platí $f''(x) = 0$ a ve kterém se průběh funkce mění z konvexního na konkávní, nebo naopak.

Poznamenejme, že pokud jsme z nějakého důvodu nedokázali rozhodnout, jaký extrém nastává u bodů, které podezříváme již od první derivace, druhá derivace nám může pomoci. Platí totiž:

- Je-li $f'(x) = 0$ a zároveň $f''(x) > 0$, pak je v x **lokální minimum**.
- Je-li $f'(x) = 0$ a zároveň $f''(x) < 0$, pak je v x **lokální maximum**.

Poznamenejme, že pokud jsme z nějakého důvodu nedokázali rozhodnout pomocí konvexnosti a konkávnosti o inflexním bodu, pomohla by nám třetí derivace.

Asymptoty bez směrnice, asymptoty se směrnicí. Adepty na asymptoty bez směrnice jsou body „vyřazené“ z definičního oboru, označme jeden z nich x_0. K tomu, abychom prohlásili přímku $x = x_0$ za asymptotu bez směrnice nám stačí, když se ukáže, že alespoň jedna jednostranná limita

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) \qquad \text{nebo} \qquad \lim_{x\to x_0^-} f(x)$$

je nevlastní (tj. $\pm\infty$).

Asymptoty se směrnicí, tj. přímky $y = kx + q$, získáme (pokud vůbec existují) výpočtem těchto limit

$$k_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad q_1 = \lim_{x\to\infty} \big(f(x) - k_1 x\big)$$

a

$$k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad q_2 = \lim_{x\to-\infty} \big(f(x) - k_2 x\big).$$

Graf funkce. Pokud dobře rozumíme jednotlivým vlastnostem a známe vazby mezi nimi, je již celkem snadné zakreslit předchozí poznatky do souřadného systému.