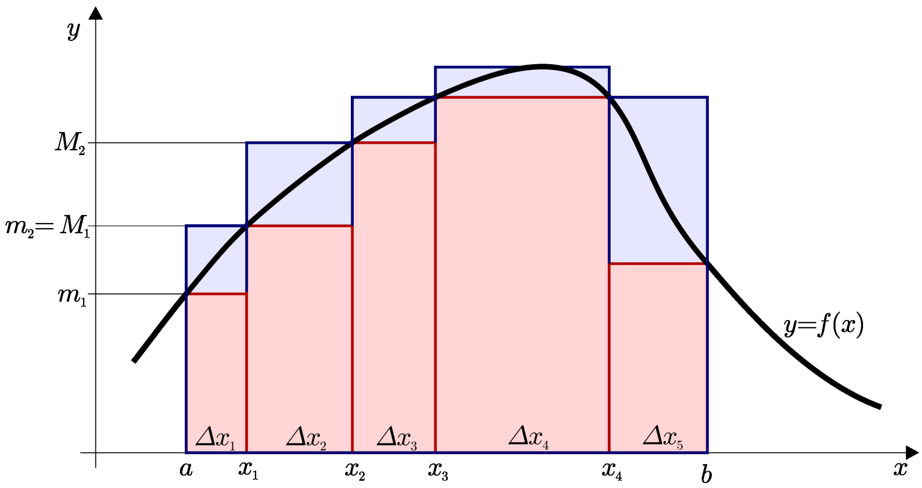
19. Určitý (Riemannův) integrál

Myšlenka integrování pochází z geometrických požadavků - zjišťování povrchů, objemů a délek geometrických útvarů. To znamená, že se omezujeme jen na nějakou část (pozn. tím máme na mysli interval) funkce, která je základem geometrického útvaru.

Pojmy potřebné k zavedení Riemannova integrálu. Nechť je dána funkce $y = f(x)$, která je spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ (viz Poznámka 19.1).

1. Rozdělme interval $\langle a, b\rangle$ body $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1}$ na n podintervalů $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$, které nemusí mít stejnou délku. Viz Obrázek 1. Toto **dělení** označme d. Délky těchto podintervalů označme stejně, tj. $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$.



Obr. 19.1: Zavedení Riemannova integrálu

2. Protože $f(x)$ je spojitá v $\langle a, b\rangle$, nabývá v něm své maximální hodnoty M a minimální hodnoty m. $f(x)$ je ovšem spojitá také v každém podintevalu Δx_i a nabývá v něm své maximální hodnoty M_i a minimální hodnoty m_i (pro $i = 1, 2, \ldots, n-1$). Platí

$$m \leq m_i \leq M_i \leq M.$$

3. Sestrojme k zavedenému dělení d tzv. **horní integrální součet** $S(d)$

$$S(d) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

a **dolní integrální součet** $s(d)$

$$s(d) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i.$$

Na Obrázku 1 je vidět, že $S(d)$ je součet plošných obsahů modrých a $s(d)$ je součet plošných obsahů červených obdélníků.

4. Poznamenejme, že hodnota $S(d)$ a $s(d)$ závisí na zvoleném dělení d. Zaveďme **horní integrál** z funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$ jako infimum množiny všech horních součtů při všech možných děleních d

$$\inf_d S(d) = \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x$$

a **dolní integrál** z funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$ jako supremum množiny všech dolních součtů při všech možných děleních d

$$\sup_d s(d) = \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x.$$

Poznámka 19.1. Požadavek, aby byla funkce $f(x)$ spojitá v $\langle a, b\rangle$ je „zbytečně“ tvrdý, stačilo by předpokládat, že funkce $f(x)$ je v $\langle a, b\rangle$ ohraničená. Pak by se místo maxim a minim uvažovala suprema a infima.

Definice 19.2. Je-li

$$\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x,$$

pak společné hodnotě těchto integrálů říkáme **integrál z funkce $f(x)$ v intervalu $\langle a, b\rangle$** a o funkci $f(x)$ říkáme, že je v $\langle a, b\rangle$ integrovatelná (tj. integrace schopná) ve smyslu Riemannovy definice.

Věta 19.3. Je-li $f(x)$ integrovatelná v $\langle a, b\rangle$ a je-li $a < c < b$, pak $f(x)$ je integrovatelná v $\langle a, c\rangle$ a v $\langle c, b\rangle$ a platí

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x. \tag{19.1}$$

Poznámka 19.4. Z předchozí věty je vidět, že k tomu, aby bylo možné funkci $f(x)$ integrovat, nemusí být $f(x)$ v intervalu $\langle a, b\rangle$ spojitá. Stačí, aby byla po částech spojitá, tzn. měla konečně mnoho bodů nespojitosti.

Definice 19.5. Pro $b < a$ je integrál definován takto

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x.$$

Uveďme ještě jednu často používanou nerovnost.

Věta 19.6. **(Schwarzova nerovnost)**

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x. \tag{19.2}$$

Nyní se dostáváme k vztahu, který má při výpočtech zásadní význam.

Věta 19.7. **(Newtonova-Leibnizova formule)** je-li $f(x)$ spojitá v $\langle a, b\rangle$ a je-li $F(x)$ libovolná funkce k ní primitivní v $\langle a, b\rangle$ a spojitá v $\langle a, b\rangle$, pak

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a). \tag{19.3}$$

Příklad 19.8. Spočtěte následující určité integrály.

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\mathrm{d}x$.

b) $\int_{-3}^{1} |x|\mathrm{d}x$.

c) $\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1+\ln x}{x}\mathrm{d}x$.

Řešení. a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \mathrm{d}x = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin 0 = 1 - 0 = 1.$

b) Při hledání primitivní funkce k funkci $|x|$ na intervalu $\langle -3, 1\rangle$ bude nutno přistoupit k rozdělení tohoto intervalu na dvě části. Dělícím bodem bude bod 0. Potom

$$\int_{-3}^{1} |x| \mathrm{d}x = \int_{-3}^{0} -x \mathrm{d}x + \int_{0}^{1} x \mathrm{d}x = \left[-\frac{x^2}{2}\right]_{-3}^{0} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1} = 0 - \left(-\frac{(-3)^2}{2}\right) + \left(\frac{1^2}{2}\right) - 0 = \frac{9}{2} + \frac{1}{2} = 5.$$

c) Je vidět, že tento integrál je poněkud komplikovanější. Pokusíme se ho zjednodušit substitucí, kdy od proměnné x přejdeme k proměnné t. Tím pádem ovšem musíme přepočítat i meze určitého integrálu, které byly zadány vzhledem k původní proměnné x.

$$\int_{1}^{\mathrm{e}} \frac{1 + \ln x}{x} \mathrm{d}x = \left\| \begin{array}{lcl|l} \text{substituce:} \quad \ln x & = & t & 1 \to 0 \\ \quad\quad \frac{1}{x}\mathrm{d}x & = & \mathrm{d}t & \mathrm{e} \to 1 \end{array} \right\| = \int_{0}^{1} (1 + t)\, \mathrm{d}t =$$

$$= \left[t + \frac{t^2}{2}\right]_{0}^{1} = 1 + \frac{1}{2} - (0 + 0) = \frac{3}{2}.$$