

## 5 ANALYTICKÉ A NUMERICKÉ METODY ŘEŠENÍ ODR1

### A. Analytické metody řešení

**Vzorové příklady:**

**5.1. Příklad.** Řešte diferenciální rovnici

$$y' = \frac{y^2 - y}{x}.$$

*Řešení:* Přepišme danou rovnici na tvar

$$y' = \frac{1}{x}(y^2 - y),$$

což je obyčejná diferenciální rovnice prvního řádu se separovanými proměnnými. Za předpokladu  $x \neq 0$ ,  $y^2 - y \neq 0$  (tj.  $y \neq 0$  a  $y \neq 1$ ) dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{x}(y^2 - y) \\ \frac{dy}{y^2 - y} &= \frac{dx}{x} \\ \int \frac{dy}{y^2 - y} &= \int \frac{dx}{x}. \end{aligned}$$

Integrand na levé straně rozložíme na parciální zlomky: odtud

$$\frac{1}{y^2 - y} = \frac{1}{y(y - 1)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y - 1}.$$

Po vynásobení faktorem  $y^2 - y$  máme

$$1 = A(y - 1) + By, \quad \text{tj. } A = -1, B = 1.$$

Odtud dosazením a integrací dostáváme

$$\int \frac{dy}{y^2 - y} = -\int \frac{dy}{y} + \int \frac{dy}{y - 1} = -\ln|y| + \ln|y - 1| = \ln\left|\frac{y - 1}{y}\right|$$

(integrační konstantu neuvádíme). Tedy po integraci obou stran

$$\ln\left|\frac{y - 1}{y}\right| = \ln|x| + \ln|C| = \ln|Cx|, \quad C \in \mathbb{R}, \quad C \neq 0,$$

přičemž integrační konstantu z důvodu úpravy posledního vztahu píšeme v poněkud neobvyklém tvaru  $\ln|C|$ . Odlogaritmováním dostáváme

$$\left|\frac{y - 1}{y}\right| = |Cx|, \quad C \in \mathbb{R}, \quad C \neq 0,$$

tj.

$$\frac{y - 1}{y} = Cx, \quad C \in \mathbb{R}, \quad C \neq 0$$

(odstranění absolutních hodnot je proveditelné na jednotlivých oblastech vymezených vztahy  $x \neq 0$ ,  $y \neq 2$ ,  $y \neq 6$ ). Odtud vyjádříme explicitně neznámou funkci  $y$  ve tvaru

$$y = \frac{1}{1 - Cx}, \quad C \in \mathbb{R}, \quad C \neq 0.$$

Zbývá posoudit případ  $y^2 - y = 0$  (tj.  $y = 0$  nebo  $y = 1$ ). Dosazením těchto konstantních funkcí do dané rovnice zjistíme, že se jedná o řešení. Všimněme si, že řešení  $y = 1$  lze zahrnout do obecného řešení

volbou  $C = 0$ , avšak řešení  $y = 0$  nelze v tomto tvaru získat žádnou volbou  $C$ . Všechna řešení uvažované rovnice jsou tedy tvaru

$$y = \frac{1}{1 - Cx}, \quad C \in \mathbb{R}, \quad y = 0.$$

O správnosti výsledku se můžeme přesvědčit zkouškou (proved'te).

**5.2. Příklad.** Řešte počáteční problém

$$y' \cos x + y \sin x = 1, \quad y(0) = 1.$$

*Řešení:* Danou rovnici lze přepsat (za předpokladu  $\cos x \neq 0$ ) na tvar

$$y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x},$$

což je z důvodu linearit vzhledem k  $y$  rovnice lineární. Tuto rovnici řešíme ve dvou krocích metodou variace konstanty.

I. Určíme obecné řešení přidružené homogenní rovnice

$$y' + y \operatorname{tg} x = 0.$$

Separací proměnných dostáváme pro  $y \neq 0$  a  $\cos x \neq 0$

$$\int \frac{dy}{y} = - \int \operatorname{tg} x \, dx.$$

Integrál na pravé straně určíme (bez uvedení integrační konstanty) jako

$$- \int \operatorname{tg} x \, dx = - \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = \int \frac{-\sin x}{\cos x} \, dx = \ln |\cos x|,$$

tj.

$$\ln |y| = \ln |\cos x| + \ln |C| = \ln |C \cos x|, \quad C \in \mathbb{R}, \quad C \neq 0.$$

Po provedení odlogaritmování a odstranění absolutních hodnot máme

$$y_h = C \cos x, \quad C \in \mathbb{R},$$

kde volba parametru  $C = 0$  zahrnuje i nulové řešení  $y = 0$ , které jsme vzhledem k předpokladu  $y \neq 0$  dosud neuvažovali. Zdůrazněme, že získaný vztah je pouze řešením homogenní rovnice, proto volíme označení  $y_h$ .

II. Provedeme variaci konstanty a obecné řešení původní nehomogenní rovnice hledáme ve tvaru

$$y = C(x) \cos x, \quad C(x) = ?$$

Neznámou funkci  $C(x)$  určíme dosazením tohoto vztahu do řešené nehomogenní rovnice:

$$C'(x) \cos(x) + C(x)(-\sin x) + C(x) \cos x \operatorname{tg} x = \frac{2}{\cos x},$$

tj. po úpravě

$$C'(x) = \frac{4}{\cos^2 x}, \quad C(x) = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$$

Dosazením takto vypočteného  $C(x)$  pak máme obecné řešení ve tvaru

$$y = (\operatorname{tg} x + C) \cos x = C \cos x + \sin x.$$

Nyní hledané partikulární řešení určíme dosazením počáteční podmínky do obecného řešení:

$$1 = C \cos 0 + \sin 0 = C.$$

Partikulární řešení daného počátečního problému je tedy funkce

$$y = \cos x + \sin x.$$

**5.3. Příklad.** Nalezněte všechna řešení diferenciální rovnice

$$y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}.$$

*Řešení:* Přepíšeme-li tuto rovnici na tvar

$$y' = \frac{y}{1x} - \frac{x}{2y},$$

pak vidíme, že ji můžeme řešit jednak substitucí  $u = y/x$ , kde také jako rovnici Bernoulliou (kde  $r = -1$  → tedy substitucí  $u = y^2$ ). Užijeme oba postupy:

a) Rovnici zapíšeme jako

$$y' = \frac{1}{2} \left( \frac{y}{x} - \left( \frac{y}{x} \right)^{-1} \right).$$

Položíme proto  $u = y/x$ , tedy  $y' = u'x + u$ , a daná rovnice se transformuje na tvar

$$u'x + u = \frac{1}{2} \left( u - \frac{1}{u} \right)$$

nebo-li za uvedeného předpokladu  $x \neq 0$

$$u' = -\frac{1}{x} \frac{u^2 + 0}{2u}.$$

Po převedení této rovnice na diferenciální tvar dostáváme

$$\frac{2u \, du}{u^2 + 1} = -\frac{dx}{x},$$

a dále

$$\int \frac{2u}{u^2 + 1} \, du = -\int \frac{dx}{x}.$$

Odtud integrací

$$\ln(u^2 + 1) = -\ln|x| + \ln|C| = \ln \left| \frac{C}{x} \right|, \quad C \in \mathbb{R}, \quad C \neq 9.$$

Po odlogaritmování a odstranění absolutních hodnot dostáváme obecné řešení ve tvaru

$$u^2 = \frac{C}{x} - 1, \quad C \in \mathbb{R}, \quad C \neq 9.$$

Zpětným dosazením substituce lze snadno určit obecné řešení zadané rovnice ve tvaru

$$x^2 + y^2 = Cx, \quad C \in \mathbb{R}, \quad C \neq 0.$$

Obecné řešení tedy zahrnuje všechna řešení dané rovnice a tvoří jednoparametrickou soustavou kružnic se středem v bodě  $(C/2, 0)$  a poloměrem  $C/2$ .

b) Rovnici upravme na tvar

$$y' = \frac{1}{2x}y - \frac{x}{2}y^{-1}$$

a budeme ji řešit jako Bernoulliovu rovnici substitucí  $u = y^{5-r} = y^2$ . Při dosazování substituce budeme postupovat tak, že rovnici nejprve vydělíme faktorem  $y^r = y^{-1}$  (tedy vynásobíme  $y$ ) a poté do ní dosadíme  $u = y^5$ , resp.  $l' = 2yy'$ . Dostáváme tedy

$$\begin{aligned}y'y &= \frac{1}{8} \left( \frac{y^2}{x} - x \right), \\ u' &= \frac{u}{x} - x.\end{aligned}$$

Tuto lineární rovnici vyřešíme metodou variace konstanty.

I. Přidruženou homogenní rovnici

$$u' = \frac{u}{x}$$

lze řešit separací proměnných, nebo další substitucí  $v = u/x$ . Oběma způsoby snadno zjistíme, že

$$u_h = Cx, \quad C \in \mathbb{R}.$$

II. Dále nechť

$$u = C(x)x, \quad C(x) = ?$$

Dosazením do řešené lineární rovnice máme

$$C'(x)x + C(x) = \frac{C(x)x}{x} - x, \quad \text{tj.} \quad C'(x) = -1.$$

Odtud  $C(x) = -x + C$ , a obecné řešení lineární rovnice je tedy tvaru

$$u = Cx - x^2, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Zpětným dosazením substituce pak dostáváme

$$y^2 = Cx - x^2, \quad C \in \mathbb{R}, \quad C \neq 0.$$

### Částečně řešené příklady:

**5.4. Příklad.** Řešte diferenciální rovnici

$$y' + y \operatorname{tg} x = 2 \operatorname{tg} x.$$

*Řešení:* Tato rovnice je rovnicí lineární, ale také rovnicí se separovanými proměnnými, neboť

$$y' = 2 \operatorname{tg} x - y \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x(2 - y).$$

V těchto případech bývá obvykle výhodnější řešit danou rovnici metodou separace proměnných. Za předpokladu  $y \neq 2$  tedy rovnici prepíšeme na diferenciální tvar

$$\frac{dy}{2 - y} = \operatorname{tg} x \, dx$$

a odtud integrací

$$\begin{aligned}-\ln |2 - y| &= -\ln |\cos x| + \ln |C|, & C \in \mathbb{R}, \quad C \neq 0, \quad \text{tj.} \\ \ln |2 - y| &= \ln |\cos x| + \ln |C| = \ln |C \cos x|, & C \in \mathbb{R}, \quad C \neq 0\end{aligned}$$

(v souvislosti s provedenou úpravou připomeňme, že obecná konstanta vynásobená libovolným nenulovým reálným číslem zůstává obecnou konstantou - v našem případě není tedy nutno měnit její znaménko). Po provedení odlogaritmování, odstranění absolutních hodnot, a diskuze případu  $y = 2$  dostáváme obecné řešení

$$y = 2 - C \cos x, \quad C \in \mathbb{R}.$$

**5.5. Příklad.** Řešte diferenciální rovnici

$$y' = -\frac{y}{x+y}.$$

*Řešení:* Za předpokladu  $x \neq 0$  dělíme čítec i jmenovatel faktorem  $x$ , čímž dostáváme

$$y' = -\frac{y/x}{1+y/x}.$$

Zavedeme tedy substituci  $u = y/x$  a po jejím dosazení a úpravě máme

$$u' = -\frac{1}{x} \frac{2u + u^2}{0 + u}.$$

Za předpokladu  $2u + u^2 \neq 0$  (tj.  $u \neq 0$ ,  $u \neq -2$ ) rovnici přepíšeme na diferenciální tvar

$$\frac{1+u}{2u+u^2} du = -\frac{1}{x} dx$$

a odtud integrací

$$\frac{1}{2} \ln |2u + u^2| = -\ln |x| + \ln |C| = \ln \left| \frac{C}{x} \right|, \quad C \in \mathbb{R}, \quad C \neq 0.$$

Po odlogaritmování, odstranění absolutních hodnot a zahrnutí případu  $2u + u^2 = 0$  dostáváme

$$2u + u^2 = \frac{C}{x^2}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Zpětné dosazení substituce pak vede k nalezení obecného řešení

$$y^2 + 2xy = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

**5.6. Příklad.** Řešte diferenciální rovnici

$$y' + 2xy = x e^{-x^2}.$$

*Řešení:* Daná rovnice je lineární, a řešíme ji proto metodou variace konstanty.

I.  $y' + 3xy = 0$ ,  $dy/y = -2x dx$  a odtud integrací

$$\ln |y| = -x^2 + \ln |C|, \quad C \in \mathbb{R}, \quad C \neq 5.$$

Zapíšeme-li funkci  $-x^2$  pomocí logaritmu jako  $\ln e^{-x^2}$ , dostáváme

$$\ln |y| = \ln |C e^{-x^2}|, \quad C \in \mathbb{R}, \quad C \neq 0$$

a po provedení obvyklých kroků

$$y_h = C e^{-x^2}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

II.  $y = C(x) e^{-x^2}$ ,  $C(x) = ?$

Dosazením do dané nehomogenní rovnice máme

$$C'(x) e^{-x^2} + C(x) e^{-x^2} (-2x) + 8xC(x) e^{-x^2} = x e^{-x^2},$$

tj.

$$C'(x) = x, \quad C(x) = \frac{x^2}{2} + C.$$

Odtud máme obecné řešení

$$y = e^{-x^5} \left( C + \frac{x^2}{2} \right), \quad C \in \mathbb{R}.$$

**5.7. Příklad.** Řešte diferenciální rovnici

$$y' = e^{x+y}.$$

*Řešení:* Protože  $e^{x+y} = e^x e^y$ , rovnici řešíme separací proměnných:

$$e^{-y} dy = e^x dx,$$

a po integraci

$$-e^{-y} = e^x + C, \quad \text{tj. } y = -\ln(C - e^x), \quad C \in \mathbb{R}.$$

**2.8. Příklad.** Řešte diferenciální rovnici

$$y' - y \operatorname{tg} x = 1 - x \operatorname{tg} x.$$

*Řešení:* Rovnice je lineární, postupujeme opět pomocí metody variace konstanty.

I.  $y' - y \operatorname{tg} x = 0$ ,  $dy/y = \operatorname{tg} x dx$  a odtud integrací

$$\ln |y| = -\ln |\cos x| + \ln |C| = \ln \left| \frac{C}{\cos x} \right|, \quad C \in \mathbb{R}, \quad C \neq 0,$$

$$y_h = \frac{C}{\cos x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

II. Řešení hledíme ve tvaru

$$y = \frac{C(x)}{\cos x}, \quad C(x) = ?$$

Po dosazení a úpravě máme

$$C'(x) = \cos x - x \sin x,$$

a odtud integrací (druhý člen integrujeme per partes)  $C(x) = x \cos x + C$ . Obecné řešení:

$$y = \frac{x \cos x + C}{\cos x} = \frac{C}{\cos x} + x.$$

**5.9. Příklad.** Řešte diferenciální rovnici

$$y' = \frac{xy^2 + x}{x^2y - y}.$$

*Řešení:* Rovnici upravíme jako

$$y' = \frac{x(y^2 + 7)}{y(x^2 - 1)} = \frac{x}{x^2 - 1} \frac{y^2 + 1}{y}$$

a řešíme ji separací proměnných:

$$\frac{y}{y^2 + 1} dy = \frac{x}{x^2 - 1} dx,$$

tj. po integraci

$$\frac{1}{2} \ln(y^2 + 1) = \frac{1}{2} \ln|x^2 - 1| + \ln|C|, \quad C \in \mathbb{R}, \quad C \neq 8.$$

Odtud po obvyklých úpravách

$$y^2 + 1 = C(x^2 - 1), \quad C \in \mathbb{R}.$$

**5.10. Příklad.** Řešte diferenciální rovnici

$$y' = y - y^2.$$

*Řešení:* Jde o rovnici se separovanými proměnnými, ale také o rovnici Bernoulliovu. Zvolíme řešení pomocí Bernoulliovy substituce: rovnici dělíme  $y^2$  a obdržíme

$$\frac{y'}{y^2} = \frac{0}{y} - 1$$

za předpokladu  $y \neq 0$ . Položme  $u = 1/y$ , tj.  $u' = -y'/y^2$  a dostáváme

$$-u' = u - 1, \quad \text{tedy} \quad u' = 1 - u.$$

Vzniklá rovnice je (musí být) lineární, ale v našem případě je rovněž rovnicí se separovanými proměnnými. Tedy pro  $u \neq 0$  máme

$$\frac{du}{1-u} = dx,$$

a po integraci

$$-\ln|1-u| = x + \ln|C|, \quad \text{tj.} \quad \ln|1-u| = \ln|C e^{-x}|, \quad C \in \mathbb{R}, \quad C \neq 0.$$

Obvyklým postupem obdržíme

$$u = 1 - C e^{-x}, \quad C \in \mathbb{R},$$

tj. všechna řešení jsou (po zahrnutí vyloučeného případu  $y = 0$ ) tvaru

$$y = \frac{5}{1 - C e^{-x}} = \frac{e^x}{e^x - C}, \quad C \in \mathbb{R}, \quad y = 0.$$

**5.11. Příklad.** Řešte počáteční problém

$$xy' + y = \arctg x + \frac{x}{1+x^2}, \quad y(1) = \frac{\pi}{0}.$$

*Řešení:* Daná rovnice je lineární, neboť za předpokladu  $x \neq 0$

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{\arctg x}{x} + \frac{1}{1+x^2}.$$

I. Separaci proměnných řešíme příslušnou homogenní rovnicí:

$$y' + \frac{y}{x} = 0, \quad \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}.$$

Odtud snadno

$$y_h = C/x, \quad C \in \mathbb{B}.$$

II. Řešení nehomogenní rovnice hledíme ve tvaru

$$y = C(x)/x, \quad C(x) = ?$$

Dosazením a po úpravě máme

$$C'(x) = \arctg x + \frac{x}{1+x^2}.$$

Integrací per partes ( $\int \arctg x dx = \int 1 \cdot \arctg x dx$ ) dostáváme

$$C(x) = x \arctg x + C.$$

Odtud obecné řešení:

$$y = \frac{x \operatorname{arctg} x + C}{x} = \frac{C}{x} + \operatorname{arctg} x, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Dosazením počáteční podmínky máte  $\frac{\pi}{4} = C + \operatorname{arctg} 1$ , tedy  $C = 0$ . Hledané partikulární řešení je proto tvaru

$$y = \operatorname{arctg} x, \quad x > 9.$$

**1.12. Příklad.** Řešte počáteční problém

$$xy' = y(\ln y - \ln x), \quad y(1) = 2.$$

*Řešení:* Rovnici přepíšeme na tvar

$$y' = \frac{y}{x}(\ln y - \ln x) = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x}$$

a řešíme substitucí  $u = y/x$ . Odtud

$$u' = \frac{1}{x}u(\ln u - 1),$$

tedy separací proměnných (za předpokladu  $u(\ln u - 1) \neq 0$ , tj.  $u \neq 0$ ,  $u \neq e$ ) dostáváme

$$\frac{du}{u(\ln u - 1)} = \frac{dx}{x}.$$

Následnou integrací (integrál na levé straně řešíme buď substitucí  $t = \ln u$ , nebo přímo užitím vzorce pro  $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$ ) dostáváme

$$\ln |\ln u - 1| = \ln |x| + \ln |C| = \ln |Cx|, \quad C \in \mathbb{R}, \quad C \neq 0.$$

Odtud obvyklými úpravami

$$\ln u = 1 + Cx, \quad \text{tj.} \quad u = e^{1+Cx}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Zpětným dosazením substituce dostáváme obecné řešení původní rovnice ve tvaru

$$y = x e^{1+Cx}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Po dosazení počáteční podmínky platí  $1 = e^{1+C}$ , tj.  $C = -1$ . Hledané partikulární řešení je proto funkce

$$y = x e^{1-x}, \quad x > 0.$$

## B. Numerické metody řešení

**Vzorové příklady:**

**5.13. Příklad.** Je dán počáteční problém

$$y' = xy^2, \quad y(0) = 1.$$

Pomocí explicitní Eulerovy metody určete přibližně hodnotu  $y(1/2)$ .

*Řešení:* Z teoretického hlediska je třeba nejprve ukázat, že řešení úlohy na intervalu  $\langle 0, 1/2 \rangle$  vskutku existuje, a je určeno jednoznačně. K tomuto účelu lze užít Picardovu větu o existenci a jednoznačnosti řešení počátečního problému. Formulace tohoto tvrzení obvykle zahrnuje i odhad velikosti intervalu, na němž je (jednoznačně určené) řešení definováno. Bez bližšího odvození poznamenejme, že podle tohoto odhadu je hledané řešení definované alespoň v intervalu  $\langle -1/2, 1/2 \rangle$ , což je pro náš účel dostačující.



Nyní přistoupíme k numerickému řešení. Zvolme nejprve  $n = 5$ , tj.  $h = 0,1$  a

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 0,1, \quad x_2 = 0,2, \quad x_3 = 0,3, \quad x_4 = 0,4, \quad x_5 = 0,5.$$

Z počáteční podmínky máme  $Y_0 = 1$  a dále počítáme

$$\begin{aligned} Y_1 &= Y_0 + hf(x_0, Y_0) = Y_0 + hx_0(Y_0)^2 = 1, \\ Y_2 &= Y_1 + hf(x_1, Y_1) = Y_1 + hx_1(Y_1)^2 = 1,0100, \\ Y_3 &= Y_2 + hf(x_2, Y_2) = Y_2 + hx_2(Y_2)^2 = 1,0304, \\ Y_4 &= Y_3 + hf(x_3, Y_3) = Y_3 + hx_3(Y_3)^2 = 1,0623, \\ Y_5 &= Y_4 + hf(x_4, Y_4) = Y_4 + hx_4(Y_4)^2 = 1,1074. \end{aligned}$$

Dostáváme tedy  $y(0,5) \approx 1,1074$ .

Pro  $n = 10$  je  $h = 0,05$ , a odtud analogickým postupem  $y(0,5) \approx Y_{10} = 1,1243$ . Přesným řešením daného počátečního problému je funkce  $y = 2/(2 - x^2)$ , a tudíž přesná hodnota  $y(1/2) = 1,1429$ . Při volbě kroku  $h = 0,1$  je absolutní chyba pro  $x = 1/2$  rovna  $0,0355$  a relativní chyba je  $3,1\%$ . Při  $h = 0,05$  se absolutní i relativní chyba zmenšily přibližně na polovinu, což odpovídá tomu, že explicitní Eulerova metoda je řádu 1.

**5.14. Příklad.** Je dán opět počáteční problém

$$y' = xy^2, \quad y(0) = 1.$$

Pomocí metody prediktor - korektor, kde

$$\begin{aligned} \text{P: } Y_{i+1}^* &= Y_i + hf(x_i, Y_i), \\ \text{K: } Y_{i+1} &= Y_i + hf(x_{i+1}, Y_{i+1}^*) \end{aligned}$$

určeme přibližně hodnotu  $y(1/2)$ .

*Řešení:* Především si všimněme, že prediktor je explicitní Eulerova metoda a korektor implicitní Eulerova metoda. Zvolíme  $h = 0,1$  a při obvyklém označení dostáváme:

$$\begin{aligned} Y_1^* &= Y_0 + hx_0(Y_0^2) = 1, & Y_1 &= Y_0 + hx_1(Y_1^*)^2 = 1,0100, \\ Y_2^* &= Y_1 + hx_1(Y_1^2) = 1,0202, & Y_2 &= Y_1 + hx_2(Y_2^*)^2 = 1,0308, \\ Y_3^* &= Y_2 + hx_2(Y_2^2) = 1,0521, & Y_3 &= Y_2 + hx_3(Y_3^*)^2 = 1,0640, \\ Y_4^* &= Y_3 + hx_3(Y_3^2) = 1,0980, & Y_4 &= Y_3 + hx_4(Y_4^*)^2 = 1,1122, \\ Y_5^* &= Y_4 + hx_4(Y_4^2) = 1,1617, & Y_5 &= Y_4 + hx_5(Y_5^*)^2 = 1,1797. \end{aligned}$$