5 ANALYTICKÉ A NUMERICKÉ METODY ŘEŠENÍ ODR1

A. Analytické metody řešení

Vzorové příklady:

5.1. Příklad. Řešte diferenciální rovnici

$$y' = \frac{y^2 - y}{x}\,.$$

Řešení: Přepišme danou rovnici na tvar

$$y' = \frac{1}{x}(y^2 - y),$$

což je obyčejná diferenciální rovnice prvního řádu se separovanými proměnnými. Za předpokladu $x \neq 0$, $y^2 - y \neq 0$ (tj. $y \neq 0$ a $y \neq 1$) dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{1}{x}(y^2 - y) \\ \frac{\mathrm{d}y}{y^2 - y} &= \frac{\mathrm{d}x}{x} \\ \int \frac{\mathrm{d}y}{y^2 - y} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{x}\,. \end{aligned}$$

Integrand na levé straně rozložíme na parciální zlomky: odtud

$$\frac{1}{y^2 - y} = \frac{1}{y(y-4)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y-1}\,.$$

Po vynásobení faktorem $y^2 - y$ máme

$$5 = A(y-1) + By, \quad \text{tj. } A = -1, B = 1.$$

Odtud dosazením a integrací dostáváme

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2 - y} = -\int \frac{\mathrm{d}y}{y} + \int \frac{\mathrm{d}y}{y-1} = -\ln|y| + \ln|y-1| = \ln\left|\frac{y-1}{y}\right|$$

(integrační konstantu neuvádíme). Tedy po integraci obou stran

$$\ln\left|\frac{y-1}{y}\right| = \ln|x| + \ln|C| = \ln|Cx|, \qquad C \in \mathbb{R}, \quad C \neq 0,$$

přičemž integrační konstantu z důvodu úpravy posledního vztahu píšeme v poněkud neobvyklém tvaru $\ln|C|$. Odlogaritmováním dostáváme

$$\left|\frac{y-1}{y}\right| = |Cx|, \qquad C \in \mathbb{R}, \quad C \neq 0,$$

tj.

$$\frac{y-1}{y} = Cx, \qquad C \in \mathbb{R}, \quad C \neq 0$$

(odstranění absolutních hodnot je proveditelné na jednotlivých oblastech vymezených vztahy $x \neq 0$, $y \neq 0$, $y \neq 1$). Odtud vyjádříme explicitně neznámou funkci y ve tvaru

$$y = \frac{1}{1 - Cx}, \qquad C \in \mathbb{R}, \quad C \neq 0.$$

Zbývá posoudit případ $y^2 - y = 0$ (tj. $y = 0$ nebo $y = 1$). Dosazením těchto konstantních funkcí do dané rovnice zjistíme, že se jedná o řešení. Všimněme si, že řešení $y = 1$ lze zahrnout do obecného řešení volbou $C = 0$, avšak řešení $y = 0$ nelze v tomto tvaru získat žádnou volbou C. Všechna řešení uvažované rovnice jsou tedy tvaru

$$y = \frac{1}{1 - Cx}, \quad C \in \mathbb{R}, \quad y = 0.$$

O správnosti výsledku se můžeme přesvědčit zkouškou (proveďte).

5.2. Příklad. Řešte počáteční problém

$$y' \cos x + y \sin x = 1, \qquad y(0) = 1\,.$$

Řešení: Danou rovnici lze přepsat (za předpokladu $\cos x \neq 0$) na tvar

$$y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x},$$

což je z důvodu linearity vzhledem k y rovnice lineární. Tuto rovnici řešíme ve dvou krocích metodou variace konstanty.

I. Určíme obecné řešení přidružené homogenní rovnice

$$y' + y \operatorname{tg} x = 0.$$

Separací proměnných dostáváme pro $y \neq 0$ a $\cos x \neq 0$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int \operatorname{tg} x \,\mathrm{d}x.$$

Integrál na pravé straně určíme (bez uvedení integrační konstanty) jako

$$-\int \operatorname{tg} x \,\mathrm{d}x = -\int \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{-\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = \ln|\cos x|,$$

tj.

$$\ln|y| = \ln|\cos x| + \ln|C| = \ln|C \cos x|, \qquad C \in \mathbb{R}, \quad C \neq 0.$$

Po provedení odlogaritmování a odstranění absolutních hodnot máme

$$y_h = C \cos x, \qquad C \in \mathbb{R},$$

kde volba parametru $C = 0$ zahrnuje i nulové řešení $y = 0$, které jsme vzhledem k předpokladu $y \neq 0$ dosud neuvažovali. Zdůrazněme, že získaný vztah je pouze řešením homogenní rovnice, proto volíme označení y_h.

II. Provedeme variaci konstanty a obecné řešení původní nehomogenní rovnice hledáme ve tvaru

$$y = C(x) \cos x, \qquad C(x) =?$$

Neznámou funkci $C(x)$ určíme dosazením tohoto vztahu do řešené nehomogenní rovnice:

$$C'(x)\cos(x) + C(x)(-\sin x) + C(x)\cos x \operatorname{tg} x = \frac{2}{\cos x},$$

tj. po úpravě

$$C'(x) = \frac{4}{\cos^2 x}, \qquad C(x) = \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C\,.$$

Dosazením takto vypočteného $C(x)$ pak máme obecné řešení ve tvaru

$$y = (\operatorname{tg} x + C)\cos x = C\cos x + \sin x.$$

Nyní hledané partikulární řešení určíme dosazením počáteční podmínky do obecného řešení:

$$1 = C \cos 0 + \sin 0 = C.$$

Partikulární řešení daného počátečního problému je tedy funkce

$$y = \cos x + \sin x.$$

5.3. Příklad. Nalezněte všechna řešení diferenciální rovnice

$$y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}.$$

Řešení: Přepíšeme-li tuto rovnici na tvar

$$y' = \frac{y}{2x} - \frac{x}{2y},$$

pak vidíme, že ji můžeme řešit jednak substitucí $u = y/x$, kde také jako rovnici Bernoulliovu (kde $r = -1$ $\rightarrow$ tedy substitucí $u = y^2$). Užijeme oba postupy:

a) Rovnici zapíšeme jako

$$y' = \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^{-1}\right).$$

Položíme proto $u = y/x$, tedy $y' = u'x + u$, a daná rovnice se transformuje na tvar

$$u'x + u = \frac{1}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right)$$

nebo-li za uvedeného předpokladu $x \neq 0$

$$u' = -\frac{1}{x}\frac{u^2+1}{2u}.$$

Po převedení této rovnice na diferenciální tvar dostáváme

$$\frac{2u\,\mathrm{d}u}{u^2+1} = -\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

a dále

$$\int \frac{2u}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = -\int \frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

Odtud integrací

$$\ln(u^2+1) = -\ln|x| + \ln|C| = \ln\left|\frac{C}{x}\right|, \qquad C \in \mathbb{R}, \quad C \neq 0.$$

Po odlogaritmování a odstranění absolutních hodnot dostáváme obecné řešení ve tvaru

$$u^2 = \frac{C}{x} - 1, \qquad C \in \mathbb{R}, \quad C \neq 0.$$

Zpětným dosazením substituce lze snadno určit obecné řešení zadané rovnice ve tvaru

$$x^2 + y^2 = Cx, \qquad C \in \mathbb{R}, \quad C \neq 0.$$

Obecné řešení tedy zahrnuje všechna řešení dané rovnice a tvoří jednoparametrickou soustavou kružnic se středem v bodě $(C/2, 0)$ a poloměrem $C/2$.

b) Rovnici upravme na tvar

$$y' = \frac{1}{2x}y - \frac{x}{2}y^{-1}$$

a budeme ji řešit jako Bernoulliovu rovnici substitucí $u = y^{1-r} = y^2$. Při dosazování substituce budeme postupovat tak, že rovnici nejprve vydělíme faktorem $y^r = y^{-1}$ (tedy vynásobíme y) a poté do ní dosadíme $u = y^2$, resp. $l' = 2yy'$. Dostáváme tedy

$$\begin{aligned} y'y &= \frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{x} - x\right), \\ u' &= \frac{u}{x} - x. \end{aligned}$$

Tuto lineární rovnici vyřešíme metodou variace konstanty.

I. Přidruženou homogenní rovnici

$$u' = \frac{u}{x}$$

lze řešit separací proměnných, nebo další substitucí $v = u/x$. Oběma způsoby snadno zjistíme, že

$$u_h = Cx, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

II. Dále nechť

$$u = C(x)x, \qquad C(x) = ?$$

Dosazením do řešené lineární rovnice máme

$$C'(x)x + C(x) = \frac{C(x)x}{x} - x, \qquad \text{tj.} \qquad C'(x) = -1.$$

Odtud $C(x) = -x + C$, a obecné řešení lineární rovnice je tedy tvaru

$$u = Cx - x^2, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Zpětným dosazením substituce pak dostáváme

$$y^2 = Cx - x^2, \qquad C \in \mathbb{R}, \quad C \neq 0.$$

Částečně řešené příklady:

5.4. Příklad. Řešte diferenciální rovnici

$$y' + y \operatorname{tg} x = 2 \operatorname{tg} x\,.$$

Řešení: Tato rovnice je rovnicí lineární, ale také rovnicí se separovanými proměnnými, neboť

$$y' = 2 \operatorname{tg} x - y \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x(2 - y).$$

V těchto případech bývá obvykle výhodnější řešit danou rovnici metodou separace proměnných. Za předpokladu $y \neq 2$ tedy rovnici přepíšeme na diferenciální tvar

$$\frac{\mathrm{d}y}{2-y} = \operatorname{tg} x \,\mathrm{d}x$$

a odtud integrací

$$\begin{aligned} -\ln|2-y| &= -\ln|\cos x| + \ln|C|, \qquad C \in \mathbb{R}, \quad C \neq 0, \quad \text{tj.} \\ \ln|2-y| &= \ln|\cos x| + \ln|C| = \ln|C\cos x|, \qquad C \in \mathbb{R}, \quad C \neq 0 \end{aligned}$$

(v souvislosti s provedenou úpravou připomeňme, že obecná konstanta vynásobená libovolným nenulovým reálným číslem zůstává obecnou konstantou - v našem případě není tedy nutno měnit její znaménko). Po provedení odlogaritmování, odstranění absolutních hodnot, a diskuze případu $y = 2$ dostáváme obecné řešení

$$y = 2 - C\cos x, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

5.5. Příklad. Řešte diferenciální rovnici

$$y' = -\frac{y}{x+y}\,.$$

Řešení: Za předpokladu $x \neq 0$ dělíme čitatel i jmenovatel faktorem x, čímž dostáváme

$$y' = -\frac{y/x}{1+y/x}.$$

Zavedeme tedy substituci $u = y/x$ a po jejím dosazení a úpravě máme

$$u' = -\frac{1}{x}\frac{2u+u^2}{1+u}\,.$$

Za předpokladu $2u + u^2 \neq 0$ (tj. $u \neq 0$, $u \neq -2$) rovnici přepíšeme na diferenciální tvar

$$\frac{1+u}{2u+u^2}\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

a odtud integrací

$$\frac{1}{2}\ln|2u+u^2| = -\ln|x| + \ln|C| = \ln\left|\frac{C}{x}\right|, \qquad C \in \mathbb{R}, \quad C \neq 0.$$

Po odlogaritmování, odstranění absolutních hodnot a zahrnutí případu $2u + u^2 = 0$ dostáváme

$$2u + u^2 = \frac{C}{x^2}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Zpětné dosazení substituce pak vede k nalezení obecného řešení

$$y^2 + 2xy = C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

5.6. Příklad. Řešte diferenciální rovnici

$$y' + 2xy = x\,\mathrm{e}^{-x^2}\,.$$

Řešení: Daná rovnice je lineární, a řešíme ji proto metodou variace konstanty.

I. $\quad y' + 2xy = 0, \quad \mathrm{d}y/y = -2x\,\mathrm{d}x$ a odtud integrací

$$\ln|y| = -x^2 + \ln|C|, \qquad C \in \mathbb{R}, \quad C \neq 0.$$

Zapíšeme-li funkci $-x^2$ pomocí logaritmu jako $\ln \mathrm{e}^{-x^2}$, dostáváme

$$\ln|y| = \ln|C\,\mathrm{e}^{-x^2}|, \qquad C \in \mathbb{R}, \quad C \neq 0$$

a po provedení obvyklých kroků

$$y_h = C\,\mathrm{e}^{-x^2}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

II. $\quad y = C(x)\,\mathrm{e}^{-x^2}, \quad C(x) = ?$

Dosazením do dané nehomogenní rovnice máme

$$C'(x)\,\mathrm{e}^{-x^2} + C(x)\,\mathrm{e}^{-x^2}(-2x) + 2xC(x)\,\mathrm{e}^{-x^2} = x\,\mathrm{e}^{-x^2},$$

tj.

$$C'(x) = x, \qquad C(x) = \frac{x^2}{2} + C.$$

Odtud máme obecné řešení
$$y = \mathrm{e}^{-x^2}\left(C + \frac{x^2}{2}\right), \qquad C \in \mathbb{R}.$$

5.7. Příklad. Řešte diferenciální rovnici
$$y' = \mathrm{e}^{x+y}\,.$$

Řešení: Protože $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^y$, rovnici řešíme separací proměnných:
$$\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\,,$$
a po integraci
$$-\,\mathrm{e}^{-y} = \mathrm{e}^x + C, \quad \text{tj.} \quad y = -\ln(C - \mathrm{e}^x), \quad C \in \mathbb{R}.$$

5.8. Příklad. Řešte diferenciální rovnici
$$y' - y\,\mathrm{tg}\,x = 1 - x\,\mathrm{tg}\,x\,.$$

Řešení: Rovnice je lineární, postupujeme opět pomocí metody variace konstanty.

I. $y' - y\,\mathrm{tg}\,x = 0$, $\mathrm{d}y/y = \mathrm{tg}\,x\,\mathrm{d}x$ a odtud integrací
$$\begin{aligned}
\ln|y| &= -\ln|\cos x| + \ln|C| = \ln\left|\frac{C}{\cos x}\right|, \qquad C \in \mathbb{R}, \quad C \neq 0\,,\\
y_h &= \frac{C}{\cos x}, \qquad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

II. Řešení hledejme ve tvaru
$$y = \frac{C(x)}{\cos x}, \qquad C(x) =?$$
Po dosazení a úpravě máme
$$C'(x) = \cos x - x\sin x,$$
a odtud integrací (druhý člen integrujeme per partes) $C(x) = x\cos x + C$. Obecné řešení:
$$y = \frac{x\cos x + C}{\cos x} = \frac{C}{\cos x} + x.$$

5.9. Příklad. Řešte diferenciální rovnici
$$y' = \frac{xy^2 + x}{x^2y - y}\,.$$

Řešení: Rovnici upravíme jako
$$y' = \frac{x(y^2+1)}{y(x^2-1)} = \frac{x}{x^2-1}\,\frac{y^2+1}{y}$$
a řešíme ji separací proměnných:
$$\frac{y}{y^2+1}\,\mathrm{d}y = \frac{x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x\,,$$
tj. po integraci
$$\frac{1}{2}\ln(y^2+1) = \frac{1}{2}\ln|x^2-1| + \ln|C|, \qquad C \in \mathbb{R}, \quad C \neq 0\,.$$
Odtud po obvyklých úpravách
$$y^2 + 1 = C(x^2-1), \qquad C \in \mathbb{R}.$$

5.10. Příklad. Řešte diferenciální rovnici

$$y' = y - y^2 \,.$$

Řešení: Jde o rovnici se separovanými proměnnými, ale také o rovnici Bernoulliovu. Zvolíme řešení pomocí Bernoulliovy substituce: rovnici dělíme y^2 a obdržíme

$$\frac{y'}{y^2} = \frac{1}{y} - 1$$

za předpokladu $y \neq 0$. Položme $u = 1/y$, tj. $u' = -y'/y^2$ a dostáváme

$$-u' = u - 1, \qquad \text{tedy} \qquad u' = 1 - u.$$

Vzniklá rovnice je (musí být) lineární, ale v našem případě je rovněž rovnicí se separovanými proměnnými. Tedy pro $u \neq 1$ máme

$$\frac{\mathrm{d}u}{1-u} = \mathrm{d}x,$$

a po integraci

$$-\ln|1-u| = x + \ln|C|, \quad \text{tj.} \quad \ln|1-u| = \ln|C\,\mathrm{e}^{-x}|, \qquad C \in \mathbb{R}, \quad C \neq 0.$$

Obvyklým postupem obdržíme

$$u = 1 - C\,\mathrm{e}^{-x}, \qquad C \in \mathbb{R},$$

tj. všechna řešení jsou (po zahrnutí vyloučeného případu $y = 0$) tvaru

$$y = \frac{1}{1 - C\,\mathrm{e}^{-x}} = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - C}, \qquad C \in \mathbb{R}, \qquad y = 0.$$

5.11. Příklad. Řešte počáteční problém

$$xy' + y = \operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2}, \qquad y(1) = \frac{\pi}{4}\,.$$

Řešení: Daná rovnice je lineární, neboť za předpokladu $x \neq 0$

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{\operatorname{arctg} x}{x} + \frac{1}{1+x^2}.$$

I. Separací proměnných řešíme příslušnou homogenní rovnici:

$$y' + \frac{y}{x} = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

Odtud snadno

$$y_h = C/x, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

II. Řešení nehomogenní rovnice hledejme ve tvaru

$$y = C(x)/x, \qquad C(x) = ?$$

Dosazením a po úpravě máme

$$C'(x) = \operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2}.$$

Integrací per partes ($\int \operatorname{arctg} x \,\mathrm{d}x = \int 1 \cdot \operatorname{arctg} x \,\mathrm{d}x$) dostáváme

$$C(x) = x \operatorname{arctg} x + C.$$

Odtud obecné řešení:

$$y = \frac{x \operatorname{arctg} x + C}{x} = \frac{C}{x} + \operatorname{arctg} x, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Dosazením počáteční podmínky máte $\frac{\pi}{4} = C + \operatorname{arctg} 1$, tedy $C = 0$. Hledané partikulární řešení je proto tvaru

$$y = \operatorname{arctg} x, \qquad x > 0.$$

5.12. Příklad. Řešte počáteční problém

$$xy' = y(\ln y - \ln x), \qquad y(1) = 1.$$

Řešení: Rovnici přepíšeme na tvar

$$y' = \frac{y}{x}(\ln y - \ln x) = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x}$$

a řešíme substitucí $u = u/x$. Odtud

$$u' = \frac{1}{x} u(\ln u - 1),$$

tedy separací proměnných (za předpokladu $u(\ln u - 1) \neq 0$, tj. $u \neq 0$, $u \neq \mathrm{e}$) dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}u}{u(\ln u - 1)} = \frac{\mathrm{d}x}{x}\,.$$

Následnou integrací (integrál na levé straně řešíme buď substitucí $t = \ln u$, nebo přímo užitím vzorce pro $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x$) dostáváme

$$\ln|\ln u - 1| = \ln|x| + \ln|C| = \ln|Cx|, \qquad C \in \mathbb{R}, \quad C \neq 0.$$

Odtud obvyklými úpravami

$$\ln u = 1 + Cx, \qquad \text{tj.} \qquad u = \mathrm{e}^{1+Cx}, \qquad C \in \mathbb{R}\,.$$

Zpětným dosazením substituce dostáváme obecné řešení původní rovnice ve tvaru

$$y = x\,\mathrm{e}^{1+Cx}, \qquad C \in \mathbb{R}\,.$$

Po dosazení počáteční podmínky platí $1 = \mathrm{e}^{1+C}$, tj. $C = -1$. Hledané partikulární řešení je proto funkce

$$y = x\,\mathrm{e}^{1-x}, \qquad x > 0\,.$$

B. Numerické metody řešení

Vzorové příklady:

5.13. Příklad. Je dán počáteční problém

$$y' = xy^2, \qquad y(0) = 1\,.$$

Pomocí explicitní Eulerovy metody určete přibližně hodnotu $y(1/2)$.

Řešení: Z teoretického hlediska je třeba nejprve ukázat, že řešení úlohy na intervalu $\langle 0, 1/2 \rangle$ vskutku existuje, a je určeno jednoznačně. K tomuto účelu lze užít Picardovu větu o existenci a jednoznačnosti řešení počátečního problému. Formulace tohoto tvrzení obvykle zahrnuje i odhad velikosti intervalu, na němž je (jednoznačně určené) řešení definováno. Bez bližšího odvození poznamenejme, že podle tohoto odhadu je hledané řešení definované alespoň v intervalu $\langle -1/2, 1/2 \rangle$, což je pro náš účel dostačující.

Nyní přistoupíme k numerickému řešení. Zvolme nejprve $n = 5$, tj. $h = 0,1$ a

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 0,1, \quad x_2 = 0,2, \quad x_3 = 0,3, \quad x_4 = 0,4, \quad x_5 = 0,5.$$

Z počáteční podmínky máme $Y_0 = 1$ a dále počítáme

$$\begin{aligned}
Y_1 &= Y_0 + hf(x_0, Y_0) = Y_0 + hx_0(Y_0)^2 = 1,\\
Y_2 &= Y_1 + hf(x_1, Y_1) = Y_1 + hx_1(Y_1)^2 = 1,0100,\\
Y_3 &= Y_2 + hf(x_2, Y_2) = Y_2 + hx_2(Y_2)^2 = 1,0304,\\
Y_4 &= Y_3 + hf(x_3, Y_3) = Y_3 + hx_3(Y_3)^2 = 1,0623,\\
Y_5 &= Y_4 + hf(x_4, Y_4) = Y_4 + hx_4(Y_4)^2 = 1,1074.
\end{aligned}$$

Dostáváme tedy $y(0,5) \approx 1,1074$.

Pro $n = 10$ je $h = 0,05$, a odtud analogickým postupem $y(0,5) \approx Y_{10} = 1,1243$. Přesným řešením daného počátečního problému je funkce $y = 2/(2 - x^2)$, a tudíž přesná hodnota $y(1/2) = 1,1429$. Při volbě kroku $h = 0,1$ je absolutní chyba pro $x = 1/2$ rovna 0,0355 a relativní chyba je $3,1\%$. Při $h = 0,05$ se absolutní i relativní chyba zmenšily přibližně na polovinu, což odpovídá tomu, že explicitní Eulerova metoda je řádu 1.

5.14. Příklad. Je dán opět počáteční problém

$$y' = xy^2, \qquad y(0) = 1\,.$$

Pomocí metody prediktor - korektor, kde

$$\begin{aligned}
&\text{P: } Y^*_{i+1} = Y_i + hf(x_i, Y_i),\\
&\text{K: } Y_{i+1} = Y_i + hf(x_{i+1}, Y^*_{i+1})
\end{aligned}$$

určeme přibližně hodnotu $y(1/2)$.

Řešení: Především si všimněme, že prediktor je explicitní Eulerova metoda a korektor implicitní Eulerova metoda. Zvolíme $h = 0,1$ a při obvyklém označení dostáváme:

$$\begin{aligned}
Y_1^* &= Y_0 + hx_0(Y_0^2) = 1, & Y_1 &= Y_0 + hx_1(Y_1^*)^2 = 1,0100,\\
Y_2^* &= Y_1 + hx_1(Y_1^2) = 1,0202, & Y_2 &= Y_1 + hx_2(Y_2^*)^2 = 1,0308,\\
Y_3^* &= Y_2 + hx_2(Y_2)^2 = 1,0521, & Y_3 &= Y_2 + hx_3(Y_3^*)^2 = 1,0640,\\
Y_4^* &= Y_3 + hx_3(Y_3)^2 = 1,0980, & Y_4 &= Y_3 + hx_4(Y_4^*)^2 = 1,1122,\\
Y_5^* &= Y_4 + hx_4(Y_4)^2 = 1,1617, & Y_5 &= Y_4 + hx_5(Y_5^*)^2 = 1,1797\,.
\end{aligned}$$