Taylorův polynom

29. září 2007

Určete Taylorův polynom druhého stupně $T_2(x, y)$ funkce f se středem v bodě $A[1, 1]$

$$f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$$

Obecný tvar Taylorova polynomu druhého stupně funkce f se středem v bodě $[x_0, y_0]$ má tvar

$$T_2([x_0, y_0]) = f([x_0, y_0]) + f'_x([x_0, y_0])(x - x_0) + f'_y([x_0, y_0])(y - y_0) + \frac{1}{2!}\Big(f''_{xx}([x_0, y_0])(x - x_0)^2 + 2f''_{xy}([x_0, y_0])(x - x_0)(y - y_0) + f''_{yy}([x_0, y_0])(y - y_0)^2\Big)$$

Obecný tvar Taylorova polynomu druhého stupně funkce f se středem v bodě $[x_0, y_0]$ má tvar

$$T_2([x_0, y_0]) = f([x_0, y_0]) + f'_x([x_0, y_0])(x - x_0) + f'_y([x_0, y_0])(y - y_0) + \frac{1}{2!}\big(f''_{xx}([x_0, y_0])(x - x_0)^2 + 2f''_{xy}([x_0, y_0])(x - x_0)(y - y_0) + f''_{yy}([x_0, y_0])(y - y_0)^2\big)$$

Taylorův polynom druhého stupně funkce f se středem v bodě $[1, 1]$ má tedy tvar

$$T_2([1, 1]) = f([1, 1]) + f'_x([1, 1])(x - 1) + f'_y([1, 1])(y - 1) + \frac{1}{2!}\big(f''_{xx}([1, 1])(x-1)^2 + 2f''_{xy}([1, 1])(x-1)(y-1) + f''_{yy}([1, 1])(y-1)^2\big)$$

$$f(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}$$

Nejprve určíme hodnotu funkce f a hodnotu parciálních derivací funkce f v bodě $A[1,1]$

$$f(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}$$

Nejprve určíme hodnotu funkce f a hodnotu parciálních derivací funkce f v bodě $A[1,1]$

Řešení: $f([1,1])=\ln\sqrt{1^2+1^2}=\frac{1}{2}\ln 2$

$$f(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}$$

Nejprve určíme hodnotu funkce f a hodnotu parciálních derivací funkce f v bodě $A[1,1]$

Řešení: $f([1,1])=\ln\sqrt{1^2+1^2}=\frac{1}{2}\ln 2$

$$f'_x=\left(\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)'_x=\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$f(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}$$

Nejprve určíme hodnotu funkce f a hodnotu parciálních derivací funkce f v bodě $A[1,1]$

Řešení: $f([1,1])=\ln\sqrt{1^2+1^2}=\frac{1}{2}\ln 2$

$$f'_x=\left(\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)'_x=\frac{x}{x^2+y^2} \qquad f'_x([1,1])=\frac{1}{1^2+1^2}=\frac{1}{2}$$

$$f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$$

Nejprve určíme hodnotu funkce f a hodnotu parciálních derivací funkce f v bodě $A[1, 1]$

Řešení: $f([1, 1]) = \ln \sqrt{1^2 + 1^2} = \frac{1}{2} \ln 2$

$$f'_x = \left(\ln \sqrt{x^2 + y^2}\right)'_x = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad f'_x([1, 1]) = \frac{1}{1^2+1^2} = \frac{1}{2}$$

$$f'_y = \left(\ln \sqrt{x^2 + y^2}\right)'_y = \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$$

Nejprve určíme hodnotu funkce f a hodnotu parciálních derivací funkce f v bodě $A[1,1]$

Řešení: $f([1,1]) = \ln\sqrt{1^2+1^2} = \frac{1}{2}\ln 2$

$$f'_x = \left(\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)'_x = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad f'_x([1,1]) = \frac{1}{1^2+1^2} = \frac{1}{2}$$

$$f'_y = \left(\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)'_y = \frac{y}{x^2+y^2} \qquad f'_y([1,1]) = \frac{1}{1^2+1^2} = \frac{1}{2}$$

$$f(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2},\quad f'_x=\frac{x}{x^2+y^2},\quad f'_y=\frac{y}{x^2+y^2}$$

Určíme hodnotu druhých parciálních derivací funkce f v bodě $A[1,1]$

$$f(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2},\quad f'_x=\frac{x}{x^2+y^2},\quad f'_y=\frac{y}{x^2+y^2}$$

Určíme hodnotu druhých parciálních derivací funkce f v bodě $A[1,1]$

Řešení: $f''_{xx}=\left(\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)''_{xx}=\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)'_x=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$

$$f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}, \quad f'_x = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad f'_y = \frac{y}{x^2+y^2}$$

Určíme hodnotu druhých parciálních derivací funkce f v bodě $A[1,1]$

Řešení: $f''_{xx} = \left(\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)''_{xx} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)'_x = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$

$$f''_{xx}([1,1]) = \frac{1^2-1^2}{(1^2+1^2)^2} = 0$$

$$f(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2},\quad f'_x=\frac{x}{x^2+y^2},\quad f'_y=\frac{y}{x^2+y^2}$$

Určíme hodnotu druhých parciálních derivací funkce f v bodě $A[1,1]$

Řešení: $f''_{xx}=\left(\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)''_{xx}=\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)'_x=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$

$$f''_{xx}([1,1])=\frac{1^2-1^2}{(1^2+1^2)^2}=0$$

$$f''_{xy}=\left(\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)''_{xy}=\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)'_y=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2},\quad f'_x=\frac{x}{x^2+y^2},\quad f'_y=\frac{y}{x^2+y^2}$$

Určíme hodnotu druhých parciálních derivací funkce f v bodě $A[1,1]$

Řešení: $f''_{xx}=\left(\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)''_{xx}=\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)'_x=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$

$$f''_{xx}([1,1])=\frac{1^2-1^2}{(1^2+1^2)^2}=0$$

$$f''_{xy}=\left(\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)''_{xy}=\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)'_y=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f''_{xy}([1,1])=\frac{-2.1.1}{(1^2+1^2)^2}=-\frac{1}{2}$$

$$f(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2},\quad f'_x=\frac{x}{x^2+y^2},\quad f'_y=\frac{y}{x^2+y^2}$$

Určíme hodnotu druhých parciálních derivací funkce f v bodě $A[1,1]$

Řešení: $f''_{xx}=\left(\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)''_{xx}=\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)'_x=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$

$$f''_{xx}([1,1])=\frac{1^2-1^2}{(1^2+1^2)^2}=0$$

$$f''_{xy}=\left(\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)''_{xy}=\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)'_y=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f''_{xy}([1,1])=\frac{-2.1.1}{(1^2+1^2)^2}=-\frac{1}{2}$$

$$f''_{yy}=\left(\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)''_{yy}=\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)'_y=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2},\quad f'_x=\frac{x}{x^2+y^2},\quad f'_y=\frac{y}{x^2+y^2}$$

Určíme hodnotu druhých parciálních derivací funkce f v bodě $A[1,1]$

Řešení: $f''_{xx}=\left(\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)''_{xx}=\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)'_x=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$

$$f''_{xx}([1,1])=\frac{1^2-1^2}{(1^2+1^2)^2}=0$$

$$f''_{xy}=\left(\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)''_{xy}=\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)'_y=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f''_{xy}([1,1])=\frac{-2.1.1}{(1^2+1^2)^2}=-\frac{1}{2}$$

$$f''_{yy}=\left(\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)''_{yy}=\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)'_y=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f''_{yy}([1,1])=\frac{1^2-1^2}{(1^2+1^2)^2}=0$$

Spočítané hodnoty

$$f([1,1]) = \frac{1}{2}\ln 2, \quad f'_x([1,1]) = \frac{1}{2}, \quad f'_x([1,1]) = \frac{1}{2},$$
$$f''_{xx}([1,1]) = 0, \quad f''_{xy}([1,1]) = -\frac{1}{2}, \quad f''_{yy}([1,1]) = 0$$

dosadíme do obecného vzorce

$$T_2(x,y) = f([1,1]) + f'_x([1,1])(x-1) + f'_y([1,1])(y-1) +$$
$$\frac{1}{2!}\left(f''_{xx}([1,1])(x-1)^2 + 2f''_{xy}([1,1])(x-1)(y-1) + f''_{yy}([1,1])(y-1)^2\right)$$

Spočítané hodnoty

$$f([1,1]) = \frac{1}{2}\ln 2, \quad f'_x([1,1]) = \frac{1}{2}, \quad f'_x([1,1]) = \frac{1}{2},$$
$$f''_{xx}([1,1]) = 0, \quad f''_{xy}([1,1]) = -\frac{1}{2}, \quad f''_{yy}([1,1]) = 0$$

dosadíme do obecného vzorce

$$T_2(x,y) = f([1,1]) + f'_x([1,1])(x-1) + f'_y([1,1])(y-1) +$$
$$\frac{1}{2!}\Big(f''_{xx}([1,1])(x-1)^2 + 2f''_{xy}([1,1])(x-1)(y-1) + f''_{yy}([1,1])(y-1)^2\Big)$$

ZÁVĚR. Taylorův polynom druhého stupně funkce $f = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ se středem v bodě $A[1,1]$ má tvar

$$T_2(x,y) = \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2}(y-1) + \frac{1}{2!}\Big(0(x-1)^2 +$$
$$2(-\frac{1}{2})(x-1)(y-1) + 0(y-1)^2\Big) = \frac{1}{2}\ln 2 - 1 + x + y - \frac{1}{2}xy$$