Lokální extrémy

10. ledna 2008

PŘÍKLAD. Určete lokální extrémy funkce $f(x, y) = xy(4 - x - y)$.

$$f(x,y) = xy(4-x-y)$$

Nejprve určíme stacionární body funkce f, to jsou právě řešení systému rovnic

$$\begin{aligned} f'_x &= 0 \\ f'_y &= 0 \end{aligned}$$

$$f(x, y) = xy(4 - x - y)$$

Nejprve určíme stacionární body funkce f, to jsou právě řešení systému rovnic

$$\begin{aligned} f'_x &= 0 \\ f'_y &= 0 \end{aligned}$$

V našem případě musíme vyřešit nelineární systém

$$\begin{aligned} f'_x &: \ y(4 - x - y) - xy = 0 \\ f'_y &: \ x(4 - x - y) - xy = 0 \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} y(4 - 2x - y) &= 0 \\ x(4 - x - 2y) &= 0 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
y(4-2x-y)&=0\\
x(4-x-2y)&=0
\end{aligned}
$$

Pro nalezení řešení tohoto systému musíme uvažovat 4 případy:

$$y(4 - 2x - y) = 0$$
$$x(4 - x - 2y) = 0$$

Pro nalezení řešení tohoto systému musíme uvažovat 4 případy:

I) Nechť $x = 0$, pak po dosazení za x do první rovnice dostáváme

$$y(4 - y) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y = 0 \quad \vee \quad y = 4$$

$$y(4 - 2x - y) = 0$$
$$x(4 - x - 2y) = 0$$

Pro nalezení řešení tohoto systému musíme uvažovat 3 případy:

I) Nechť $x = 0$, pak po dosazení za x do první rovnice dostáváme

$$y(4 - y) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y = 0 \ \vee \ y = 4$$

Máme tedy první dva stacionární body $A_1[0, 0]$ a $A_2[0, 4]$.

$$y(4-2x-y)=0$$
$$x(4-x-2y)=0$$

Pro nalezení řešení tohoto systému musíme uvažovat 3 případy:

I) Nechť $x=0$, pak po dosazení za x do první rovnice dostáváme

$$y(4-y)=0 \quad \Longleftrightarrow \quad y=0 \ \vee \ y=4$$

Máme tedy první dva stacionární body $A_1[0,0]$ a $A_2[0,4]$.

II) Nechť $y=0$, pak po dosazení za y do druhé rovnice dostáváme

$$x(4-x)=0 \quad \Longleftrightarrow \quad x=0 \ \vee \ x=4$$

$$y(4 - 2x - y) = 0$$
$$x(4 - x - 2y) = 0$$

Pro nalezení řešení tohoto systému musíme uvažovat 3 případy:

I) Nechť $x = 0$, pak po dosazení za x do první rovnice dostáváme

$$y(4 - y) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y = 0 \ \vee \ y = 4$$

Máme tedy první dva stacionární body $A_1[0, 0]$ a $A_2[0, 4]$.

II) Nechť $y = 0$, pak po dosazení za y do druhé rovnice dostáváme

$$x(4 - x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0 \ \vee \ x = 4$$

Odsud máme další stacionární bod $A_3[4, 0]$.

$$
\begin{aligned}
y(4-2x-y)&=0\\
x(4-x-2y)&=0
\end{aligned}
$$

III) Nechť $x \neq 0$ a zároveň $y \neq 0$, pak můžeme vydělit první rovnici y resp. druhou rovnici x a dostáváme lineární systém

$$\begin{aligned} y(4-2x-y) &= 0 \\ x(4-x-2y) &= 0 \end{aligned}$$

III) Nechť $x \neq 0$ a zároveň $y \neq 0$, pak můžeme vydělit první rovnici y resp. druhou rovnici x a dostáváme lineární systém

$$\begin{aligned} 4-2x-y &= 0 \\ 4-x-2y &= 0 \end{aligned}$$

$$y(4 - 2x - y) = 0$$
$$x(4 - x - 2y) = 0$$

III) Nechť $x \neq 0$ a zároveň $y \neq 0$, pak můžeme vydělit první rovnici y resp. druhou rovnici x a dostáváme lineární systém

$$4 - 2x - y = 0$$
$$4 - x - 2y = 0,$$

jehož vyřešením získáme poslední stacionární bod $A_4[\frac{4}{3}, \frac{4}{3}]$.

$$f'_x = y(4-2x-y), \quad f'_y = x(4-x-2y)$$

K určení toho zda nastává ve stacionárních bodech extrém budeme potřebovat matici druhých derivací

$$f'' = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{pmatrix}$$

$$f'_x = y(4 - 2x - y), \quad f'_y = x(4 - x - 2y)$$

K určení toho zda nastává ve stacionárních bodech extrém budeme potřebovat matici druhých derivací

$$f'' = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{pmatrix}$$

Označme

$$D_1 = f''_{xx}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix} = f''_{xx} f''_{yy} - (f''_{xy})^2$$

$$f'_x = y(4 - 2x - y), \quad f'_y = x(4 - x - 2y)$$

K určení toho zda nastává ve stacionárních bodech extrém budeme potřebovat matici druhých derivací

$$f'' = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{pmatrix}$$

Označme

$$D_1 = f''_{xx}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix} = f''_{xx} f''_{yy} - (f''_{xy})^2$$

Matice druhých derivací pro naši funkci $f(x, y) = xy(4 - x - y)$ je

$$f'' = \begin{pmatrix} -2y & 4 - 2x - 2y \\ 4 - 2x - 2y & -2x \end{pmatrix}$$

$$f'' = \begin{pmatrix} -2y & 4-2x-2y \\ 4-2x-2y & -2x \end{pmatrix}$$

Dosadíme postupně jednotlivé stacionární body do matice druhých derivací a určíme hodnoty D_1 resp. D_2.

$$f'' = \begin{pmatrix} -2y & 4-2x-2y \\ 4-2x-2y & -2x \end{pmatrix}$$

Dosadíme postupně jednotlivé stacionární body do matice druhých derivací a určíme hodnoty D_1 resp. D_2.

$$f''(A_1[0,0]) = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \quad D_2(A_1) = 0 - 16 = -16 < 0$$

$$f'' = \begin{pmatrix} -2y & 4-2x-2y \\ 4-2x-2y & -2x \end{pmatrix}$$

Dosadíme postupně jednotlivé stacionární body do matice druhých derivací a určíme hodnoty D_1 resp. D_2.

$$f''(A_1[0,0]) = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \quad D_2(A_1) = 0 - 16 = -16 < 0$$

Protože $D_2(A_1) < 0$ lokální extrém v bodě $A_1[0,0]$ nenastává, je tam sedlo.

$$f'' = \begin{pmatrix} -2y & 4-2x-2y \\ 4-2x-2y & -2x \end{pmatrix}$$

Dosadíme postupně jednotlivé stacionární body do matice druhých derivací a určíme hodnoty D_1 resp. D_2.

$$f''(A_1[0,0]) = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \quad D_2(A_1) = 0 - 16 = -16 < 0$$

Protože $D_2(A_1) < 0$ lokální extrém v bodě $A_1[0,0]$ nenastává, je tam sedlo.

$$f''(A_2[0,4]) = \begin{vmatrix} -8 & -4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} \quad D_2(A_2) = 0 - 16 = -16 < 0$$

$$f'' = \begin{pmatrix} -2y & 4-2x-2y \\ 4-2x-2y & -2x \end{pmatrix}$$

Dosadíme postupně jednotlivé stacionární body do matice druhých derivací a určíme hodnoty D_1 resp. D_2.

$$f''(A_1[0,0]) = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \quad D_2(A_1) = 0 - 16 = -16 < 0$$

Protože $D_2(A_1) < 0$ lokální extrém v bodě $A_1[0,0]$ nenastává, je tam sedlo.

$$f''(A_2[0,4]) = \begin{vmatrix} -8 & -4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} \quad D_2(A_2) = 0 - 16 = -16 < 0$$

Protože $D_2(A_2) < 0$ lokální extrém v bodě $A_2[0,4]$ nenastává, je tam sedlo.

$$f'' = \begin{pmatrix} -2y & 4-2x-2y \\ 4-2x-2y & -2x \end{pmatrix}$$

$$f''(A_3[4,0]) = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 8 \end{vmatrix} \quad D_2(A_3) = 0 - 16 = -16 < 0$$

$$f'' = \begin{pmatrix} -2y & 4-2x-2y \\ 4-2x-2y & -2x \end{pmatrix}$$

$$f''(A_3[4,0]) = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 8 \end{vmatrix} \quad D_2(A_3) = 0 - 16 = -16 < 0$$

Protože $D_2(A_3) < 0$ lokální extrém v bodě $A_3[4,0]$ nenastává, je tam sedlo.

$$f'' = \begin{pmatrix} -2y & 4-2x-2y \\ 4-2x-2y & -2x \end{pmatrix}$$

$$f''(A_3[4,0]) = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 8 \end{vmatrix} \quad D_2(A_3) = 0 - 16 = -16 < 0$$

Protože $D_2(A_3) < 0$ lokální extrém v bodě $A_3[4,0]$ nenastává, je tam sedlo.

$$f''(A_4[\tfrac{4}{3}, \tfrac{4}{3}]) = \begin{vmatrix} -\frac{8}{3} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} & -\frac{8}{3} \end{vmatrix} \quad D_2(A_4) = \frac{64}{9} - \frac{16}{9} = \frac{48}{9} > 0$$

$$f'' = \begin{pmatrix} -2y & 4-2x-2y \\ 4-2x-2y & -2x \end{pmatrix}$$

$$f''(A_3[4,0]) = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 8 \end{vmatrix} \quad D_2(A_3) = 0 - 16 = -16 < 0$$

Protože $D_2(A_3) < 0$ lokální extrém v bodě $A_3[4,0]$ nenastává, je tam sedlo.

$$f''(A_4[\tfrac{4}{3}, \tfrac{4}{3}]) = \begin{vmatrix} -\frac{8}{3} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} & -\frac{8}{3} \end{vmatrix} \quad D_2(A_4) = \frac{64}{9} - \frac{16}{9} = \frac{48}{9} > 0$$

Protože $D_2(A_4) > 0$ lokální extrém v bodě $A_4[\frac{4}{3}, \frac{4}{3}]$ nastává. Znaménko $D_1(A_4)$ určí zda je v tomto bodě maximum (< 0) resp. minimum (> 0).

$$f'' = \begin{pmatrix} -2y & 4-2x-2y \\ 4-2x-2y & -2x \end{pmatrix}$$

$$f''(A_3[4,0]) = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 8 \end{vmatrix} \quad D_2(A_3) = 0 - 16 = -16 < 0$$

Protože $D_2(A_3) < 0$ lokální extrém v bodě $A_3[4,0]$ nenastává, je tam sedlo.

$$f''(A_4[\tfrac{4}{3},\tfrac{4}{3}]) = \begin{vmatrix} -\frac{8}{3} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} & -\frac{8}{3} \end{vmatrix} \quad D_2(A_4) = \frac{64}{9} - \frac{16}{9} = \frac{48}{9} > 0$$

Protože $D_2(A_4) > 0$ lokální extrém v bodě $A_4[\frac{4}{3},\frac{4}{3}]$ nastává. Znaménko $D_1(A_4)$ určí zda je v tomto bodě maximum (< 0) resp. minimum (> 0).

$$D_1(A_4) = f''_{xx}(A_4) = -\tfrac{8}{3} < 0$$

$$f'' = \begin{pmatrix} -2y & 4-2x-2y \\ 4-2x-2y & -2x \end{pmatrix}$$

$$f''(A_3[4,0]) = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 8 \end{vmatrix} \quad D_2(A_3) = 0 - 16 = -16 < 0$$

Protože $D_2(A_3) < 0$ lokální extrém v bodě $A_3[4,0]$ nenastává, je tam sedlo.

$$f''(A_4[\tfrac{4}{3}, \tfrac{4}{3}]) = \begin{vmatrix} -\frac{8}{3} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} & -\frac{8}{3} \end{vmatrix} \quad D_2(A_4) = \frac{64}{9} - \frac{16}{9} = \frac{48}{9} > 0$$

Protože $D_2(A_4) > 0$ lokální extrém v bodě $A_4[\frac{4}{3}, \frac{4}{3}]$ nastává. Znaménko $D_1(A_4)$ určí zda je v tomto bodě maximum (< 0) resp. minimum (> 0).

$$D_1(A_4) = f''_{xx}(A_4) = -\frac{8}{3} < 0$$

V bodě $A_4[\frac{4}{3}, \frac{4}{3}]$ nastává lokální maximum.

ZÁVĚR. Lokální extrém nastává v bodě $A_4[\frac{4}{3}, \frac{4}{3}]$, je tam lokální maximum. Jeho hodnota je $f(A_4)_{\mathsf{max}} = \frac{64}{27}$

V bodech $A_1[0, 0]$, $A_2[0, 4]$, $A_4[4, 0]$ lokální extrém nenastáva.