Globální extrémy

10. ledna 2008

PŘÍKLAD. Určete globální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + 2xy + 2y^2 - 3x - 5y$ na množině M. Množina M je trojúhelník určený body $A[0,2]$, $B[3,0]$, $C[0,-1]$.

$$f(x,y) = x^2 + 2xy + 2y^2 - 3x - 5y$$

Protože množina M je kompaktní (uzavřená, ohraničená) a funkce f je spojitá, nabývá na množině M své největší a nejmenší hodnoty. Globální extrémy jsou buď v bodech lokálních extrému uvnitř množiny M nebo na její hranici.

$$f(x,y) = x^2 + 2xy + 2y^2 - 3x - 5y$$

Protože množina M je kompaktní (uzavřená, ohraničená) a funkce f je spojitá, nabývá na množině M své největší a nejmenší hodnoty. Globální extrémy jsou buď v bodech lokálních extrému uvnitř množiny M nebo na její hranici.

Njeprve určíme lokální extrémy funkce f. K tomu potřebujeme najít stacionární body, tj. řešení systému:

$$\begin{aligned} f'_x &= 0 \\ f'_y &= 0 \end{aligned}$$

$$f(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2 - 3x - 5y$$

Protože množina M je kompaktní (uzavřená, ohraničená) a funkce f je spojitá, nabývá na množině M své největší a nejmenší hodnoty. Globální extrémy jsou buď v bodech lokálních extrému uvnitř množiny M nebo na její hranici.

Njeprve určíme lokální extrémy funkce f. K tomu potřebujeme najít stacionární body, tj. řešení systému:

$$\begin{aligned} f'_x &= 0 \\ f'_y &= 0 \end{aligned}$$

V našem případě musíme vyřešit lineární systém

$$\begin{aligned} f'_x &: \ 2x + 2y - 3 = 0 \\ f'_y &: \ 2x + 4y - 5 = 0 \end{aligned}$$

$$f(x,y) = x^2 + 2xy + 2y^2 - 3x - 5y$$

Protože množina M je kompaktní (uzavřená, ohraničená) a funkce f je spojitá, nabývá na množině M své největší a nejmenší hodnoty. Globální extrémy jsou buď v bodech lokálních extrému uvnitř množiny M nebo na její hranici.

Njeprve určíme lokální extrémy funkce f. K tomu potřebujeme najít stacionární body, tj. řešení systému:

$$\begin{aligned} f'_x &= 0 \\ f'_y &= 0 \end{aligned}$$

V našem případě musíme vyřešit lineární systém

$$\begin{aligned} f'_x &: \ 2x + 2y - 3 = 0 \\ f'_y &: \ 2x + 4y - 5 = 0 \end{aligned}$$

Jediným řešením je bod $A_1[\frac{1}{2}, 1]$.

$$f'_x: \; 2x + 2y - 3 \qquad f'_y: \; 2x + 4y - 5$$

Určíme zda ve stacionárním bodě $A_1[\frac{1}{2}, 1]$ nastává lokální extrém. K tomu potřebujeme matici druhých derivací funkce f.

$$f'_x: \; 2x + 2y - 3 \quad f'_y: \; 2x + 4y - 5$$

Určíme zda ve stacionárním bodě $A_1[\frac{1}{2}, 1]$ nastává lokální extrém. K tomu potřebujeme matici druhých derivací funkce f.

$$f'' = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = f''(A_1)$$

$$f'_x: \; 2x + 2y - 3 \quad f'_y: \; 2x + 4y - 5$$

Určíme zda ve stacionárním bodě $A_1[\frac{1}{2}, 1]$ nastává lokální extrém. K tomu potřebujeme matici druhých derivací funkce f.

$$f'' = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = f''(A_1)$$

$D_2(A_1) = f''_{xx}(A_1) f''_{yy}(A_1) - f''_{xy}(A_1)^2 = 8 - 4 = 4 > 0$, tedy lokální extrém v bodě $A_1[\frac{1}{2}, 1]$ nastává a protože $D_1(A_1) = f''_{xx}(A_1) = 2 > 0$ je v tomto bodě lokální minimum.

$$f(x,y) = x^2 + 2xy + 2y^2 - 3x - 5y$$

Nyní prozkoumáme hranici množiny M. Tu tvoří tři úsečky $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$, kde $A[0,2]$, $B[3,0]$, $C[0,-1]$.

$$f(x,y) = x^2 + 2xy + 2y^2 - 3x - 5y$$

Nyní prozkoumáme hranici množiny M. Tu tvoří tři úsečky $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$, kde $A[0,2]$, $B[3,0]$, $C[0,-1]$.

I) Úsečka $\overrightarrow{AB}$ leží na přímce $y = 2 - \frac{2}{3}x$. Dosadíme do funkce f za y a budeme hledat extrémy funkce jedné proměné

$$f(x,y) = x^2 + 2xy + 2y^2 - 3x - 5y$$

Nyní prozkoumáme hranici množiny M. Tu tvoří tři úsečky $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$, kde $A[0,2]$, $B[3,0]$, $C[0,-1]$.

I) Úsečka $\overrightarrow{AB}$ leží na přímce $y = 2 - \frac{2}{3}x$. Dosadíme do funkce f za y a budeme hledat extrémy funkce jedné proměné

$$\begin{aligned} f(x, 2 - \tfrac{2}{3}x) &= x^2 + 2x(2 - \tfrac{2}{3}x) + 2(2 - \tfrac{2}{3}x)^2 - 3x - 5(2 - \tfrac{2}{3}x) = \\ &= \tfrac{5}{9}x^2 - x - 2 \end{aligned}$$

$$f(x,y) = x^2 + 2xy + 2y^2 - 3x - 5y$$

Nyní prozkoumáme hranici množiny M. Tu tvoří tři úsečky $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$, kde $A[0,2]$, $B[3,0]$, $C[0,-1]$.

I) Úsečka $\overrightarrow{AB}$ leží na přímce $y = 2 - \frac{2}{3}x$. Dosadíme do funkce f za y a budeme hledat extrémy funkce jedné proměné

$$\begin{aligned} f(x, 2-\tfrac{2}{3}x) &= x^2 + 2x(2-\tfrac{2}{3}x) + 2(2-\tfrac{2}{3}x)^2 - 3x - 5(2-\tfrac{2}{3}x) = \\ &= \tfrac{5}{9}x^2 - x - 2 \end{aligned}$$

Položíme $f' = 0$ a dostaneme další stacionární bod $A_2[\frac{9}{10}, \frac{7}{5}]$

$$f' : \ \frac{10}{9}x - 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{9}{10} \quad \Longrightarrow \quad y = 2 - \frac{2}{3}\ \frac{9}{10} = \frac{7}{5}$$

$$f(x,y) = x^2 + 2xy + 2y^2 - 3x - 5y$$

Nyní prozkoumáme hranici množiny M. Tu tvoří tři úsečky $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$, kde $A[0,2]$, $B[3,0]$, $C[0,-1]$.

I) Úsečka $\overrightarrow{AB}$ leží na přímce $y = 2 - \frac{2}{3}x$. Dosadíme do funkce f za y a budeme hledat extrémy funkce jedné proměné

$$\begin{aligned} f(x, 2-\tfrac{2}{3}x) &= x^2 + 2x(2-\tfrac{2}{3}x) + 2(2-\tfrac{2}{3}x)^2 - 3x - 5(2-\tfrac{2}{3}x) = \\ &= \tfrac{5}{9}x^2 - x - 2 \end{aligned}$$

Položíme $f' = 0$ a dostaneme další stacionární bod $A_2[\frac{9}{10}, \frac{7}{5}]$

$$f': \ \frac{10}{9}x - 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{9}{10} \quad \Longrightarrow \quad y = 2 - \frac{2}{3}\ \frac{9}{10} = \frac{7}{5}$$

$f'' = \frac{10}{9} > 0$ jedná se tedy o lokální minimum na úsečce $\overrightarrow{AB}$

$$f(x,y)=x^2+2xy+2y^2-3x-5y$$

II) Úsečka $\overrightarrow{BC}$ leží na přímce $x=3y+3$. Dosadíme do funkce f za x a opět budeme hledat extrémy funkce jedné proměné.

$$f(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2 - 3x - 5y$$

II) Úsečka $\overrightarrow{BC}$ leží na přímce $x = 3y + 3$. Dosadíme do funkce f za x a opět budeme hledat extrémy funkce jedné proměné.

$$\begin{aligned} f(3y+3, y) &= (3y+3)^2 + 2(3y+3)y + 2y^2 - 3(3y+3) - 5y = \\ &= 17y^2 + 10y \end{aligned}$$

$$f(x,y) = x^2 + 2xy + 2y^2 - 3x - 5y$$

II) Úsečka $\overrightarrow{BC}$ leží na přímce $x = 3y + 3$. Dosadíme do funkce f za x a opět budeme hledat extrémy funkce jedné proměné.

$$\begin{aligned} f(3y+3,y) &= (3y+3)^2 + 2(3y+3)y + 2y^2 - 3(3y+3) - 5y = \\ &= 17y^2 + 10y \end{aligned}$$

Položíme $f' = 0$ a dostaneme další stacionární bod $A_3[\frac{36}{17}, -\frac{5}{17}]$

$$f' : \; 34y + 10 = 0 \iff y = -\frac{5}{17} \implies x = 3\Big(-\frac{5}{17}\Big) + 3 \; = \; \frac{36}{17}$$

$$f(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2 - 3x - 5y$$

II) Úsečka $\overrightarrow{BC}$ leží na přímce $x = 3y + 3$. Dosadíme do funkce f za x a opět budeme hledat extrémy funkce jedné proměné.

$$\begin{aligned} f(3y+3, y) &= (3y+3)^2 + 2(3y+3)y + 2y^2 - 3(3y+3) - 5y = \\ &= 17y^2 + 10y \end{aligned}$$

Položíme $f' = 0$ a dostaneme další stacionární bod $A_3[\frac{36}{17}, -\frac{5}{17}]$

$$f' : \; 34y + 10 = 0 \iff y = -\frac{5}{17} \implies x = 3\left(-\frac{5}{17}\right) + 3 \; = \; \frac{36}{17}$$

$f'' = 34 > 0$ jedná se tedy o lokální minimum na úsečce $\overrightarrow{BC}$

$$f(x,y) = x^2 + 2xy + 2y^2 - 3x - 5y$$

III) Úsečka $\overrightarrow{CA}$ leží na přímce $x = 0$. Dosadíme do funkce f za x a opět budeme hledat extrémy funkce jedné proměné.

$$f(x,y) = x^2 + 2xy + 2y^2 - 3x - 5y$$

III) Úsečka $\overrightarrow{CA}$ leží na přímce $x = 0$. Dosadíme do funkce f za x a opět budeme hledat extrémy funkce jedné proměné.

$$f(0,y) = 2y^2 - 5y$$

$$f(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2 - 3x - 5y$$

III) Úsečka $\overrightarrow{CA}$ leží na přímce $x = 0$. Dosadíme do funkce f za x a opět budeme hledat extrémy funkce jedné proměné.

$$f(0, y) = 2y^2 - 5y$$

Položíme $f' = 0$ a dostaneme další stacionární bod $A_4[0, \frac{5}{4}]$

$f' : \; 4y - 5 = 0 \iff y = \frac{5}{4} \quad x = 0$

$$f(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2 - 3x - 5y$$

III) Úsečka $\overrightarrow{CA}$ leží na přímce $x = 0$. Dosadíme do funkce f za x a opět budeme hledat extrémy funkce jedné proměné.

$$f(0, y) = 2y^2 - 5y$$

Položíme $f' = 0$ a dostaneme další stacionární bod $A_4[0, \frac{5}{4}]$

$f' : \ 4y - 5 = 0 \iff y = \frac{5}{4} \quad x = 0$

$f'' = 4 > 0$ jedná se tedy o lokální minimum na úsečce $\overrightarrow{CA}$.

$$f(x,y) = x^2 + 2xy + 2y^2 - 3x - 5y$$

Hranici úseček tvoří body $A[0,2]$, $B[3,0]$ a $C[0,-1]$, globální extrémy mohou tedy nastat i v těchto bodech.

$$f(x,y) = x^2 + 2xy + 2y^2 - 3x - 5y$$

Hranici úseček tvoří body $A[0,2]$, $B[3,0]$ a $C[0,-1]$, globální extrémy mohou tedy nastat i v těchto bodech.
Nyní určíme funkční hodnoty ve všech stacionárních a hraničních bodech.

$$f(x,y) = x^2 + 2xy + 2y^2 - 3x - 5y$$

Hranici úseček tvoří body $A[0,2]$, $B[3,0]$ a $C[0,-1]$, globální extrémy mohou tedy nastat i v těchto bodech.
Nyní určíme funkční hodnoty ve všech stacionárních a hraničních bodech

$$f(A_1[\tfrac{1}{2},1]) = -\frac{13}{4} \qquad f(A[0,2]) = -2$$

$$f(A_2[\tfrac{9}{10},\tfrac{7}{5}]) = -\frac{49}{20} \qquad f(B[3,0]) = 0$$

$$f(A_3[\tfrac{36}{17},-\tfrac{5}{17}]) = -\frac{25}{17} \qquad f(C[0,-1]) = 7$$

$$f(A_4[0,\tfrac{5}{4}]) = -\frac{25}{8}$$

$$f(x,y) = x^2 + 2xy + 2y^2 - 3x - 5y$$

Hranici úseček tvoří body $A[0,2]$, $B[3,0]$ a $C[0,-1]$, globální extrémy mohou tedy nastat i v těchto bodech.
Nyní určíme funkční hodnoty ve všech stacionárních a hraničních bodech

$$f(A_1[\tfrac{1}{2},1]) = -\tfrac{13}{4} \qquad f(A[0,2]) = -2$$
$$f(A_2[\tfrac{9}{10},\tfrac{7}{5}]) = -\tfrac{49}{20} \qquad f(B[3,0]) = 0$$
$$f(A_3[\tfrac{36}{17},-\tfrac{5}{17}]) = -\tfrac{25}{17} \qquad f(C[0,-1]) = 7$$
$$f(A_4[0,\tfrac{5}{4}]) = -\tfrac{25}{8}$$

Vybereme největší $f(C[0,-1]) = 7$ a nejmenší $f(A_1[\frac{1}{2},1]) = -\frac{13}{4}$ hodnotu. V bodě $f(C[0,-1])$ nastává tedy globální maximum, v bodě $A_1[\frac{1}{2},1]$ globální minimum.