Funkce zadaná implicitně

© ÚM FSI VUT v Brně

3. října 2007

PŘÍKLAD. Určete rovnici tečné roviny v bodě $A[1,1,1]$ k ploše určené rovnicí $x^2+y^2-3xz+x+y-z=0$.

$$x^2 + y^2 - 3xz + x + y - z = 0$$

Tečná rovina k funkci $f(x, y)$ v bodě $A[x_0, y_0, z_0]$ má tvar

$$z - z_0 = f'_x(A)(x - x_0) + f'_y(A)(y - y_0).$$

$$x^2 + y^2 - 3xz + x + y - z = 0$$

Tečná rovina k funkci $f(x, y)$ v bodě $A[x_0, y_0, z_0]$ má tvar

$$z - z_0 = f'_x(A)(x - x_0) + f'_y(A)(y - y_0).$$

Protože funkce f je zadána implicitně rovnicí $F(x, y, z) = 0$ její parciální derivace jsou

$$f'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}, \qquad f'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}$$

$$x^2 + y^2 - 3xz + x + y - z = 0$$

Tečná rovina k funkci $f(x, y)$ v bodě $A[x_0, y_0, z_0]$ má tvar

$$z - z_0 = f'_x(A)(x - x_0) + f'_y(A)(y - y_0).$$

Protože funkce f je zadána implicitně rovnicí $F(x, y, z) = 0$, její parciální derivace jsou

$$f'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}, \qquad f'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}$$

$$f'_x = -\frac{2x-3z+1}{-3x-1}, \qquad f'_x = -\frac{2y+1}{-3x-1}$$

$$x^2 + y^2 - 3xz + x + y - z = 0$$

Tečná rovina k funkci $f(x, y)$ v bodě $A[x_0, y_0, z_0]$ má tvar

$$z - z_0 = f'_x(A)(x - x_0) + f'_y(A)(y - y_0).$$

Protože funkce f je zadána implicitně rovnicí $F(x, y, z) = 0$, její parciální derivace jsou

$$f'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}, \qquad f'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}$$

$$f'_x = -\frac{2x-3z+1}{-3x-1}, \qquad f'_x = -\frac{2y+1}{-3x-1}$$

Hodnoty parciálních derivací v bodě $A[1, 1, 1]$ tedy jsou

$$f'_x(A) = -\frac{2-3+1}{-3-1} = 0, \qquad f'_y = -\frac{2+1}{-3-1} = \frac{3}{4}$$

$$z - z_0 = f'_x(A)(x - x_0) + f'_y(A)(y - y_0)$$

Dosazením spočítaných hodnot $f'_x(A) = 0,\ f'_y = -\frac{3}{4}$ do obecného tvaru rovnice tečny dostáváme

$$z - z_0 = f'_x(A)(x - x_0) + f'_y(A)(y - y_0)$$

Dosazením spočítaných hodnot $f'_x(A) = 0,\ f'_y = -\frac{3}{4}$ do obecného tvaru rovnice tečny dostáváme

$$z - 1 = 0(x - x_0) + \frac{3}{4}(y - 1)$$

$$z - z_0 = f'_x(A)(x - x_0) + f'_y(A)(y - y_0)$$

Dosazením spočítaných hodnot $f'_x(A) = 0,\ f'_y = -\frac{3}{4}$ do obecného tvaru rovnice tečny dostáváme

$$z - 1 = 0(x - x_0) + \frac{3}{4}(y - 1)$$

Tečná rovina k funkci zadané implicitně

$$x^2 + y^2 - 3xz + x + y - z = 0$$

v bodě $A[1, 1, 1]$ má tedy tvar

$$3y - 4z + 1 = 0$$