

# Kapitola 7

## Křivky a plochy technické praxe

V technické praxi se setkáváme s tím, že potřebujeme křivky a plochy, které se dají libovolně upravovat a zároveň je jejich matematické vyjádření jednoduché. V šedesátých letech minulého století se objevily Fergusonovy, později Bézierovy a Coonsovy křivky a plochy. Na ně navázaly splajny a v současné době se v moderních CAD systémech používají NURBS křivky a plochy. V roce 2003 se ve studiu Maya objevily plochy T-spline.

### 7.1 Základní princip

Základem všech výše uvedených ploch a křivek jsou řídicí body. Křivka či plocha jimi obecně neprochází, jedná se tedy o aproximační křivky a plochy. K těmto bodům jsou podle typu vybrány řídicí – **bázové** funkce - bersteinovy polynomy pro Bézierovy křivky a plochy, B-spline funkce pro splajny a NURBS.

Výsledný bod na křivce či ploše je dán jako lineární kombinace řídicího bodu s funkcí k němu patřící. Vysvětlíme si to na Bézierově křivce.

Máme dány čtyři řídicí body  $P_0, P_1, P_2, P_3$  a bázové bersteinovy polynomy:

$$\begin{aligned} B_0(t) &= (1-t)^3 \\ B_1(t) &= 3t(1-t)^2 \\ B_2(t) &= 3t^2(1-t) \\ B_3(t) &= t^3 \end{aligned} \tag{7.1}$$

Parametr  $t$  probíhá v intervalu od nuly do jedné a pro každou hodnotu určí jeden bod na výsledné křivce. Vezmeme pevně parametr  $t$  roven 0,25 a vypočítáme výsledný bod jako kombinaci

$$C(0,25) = P_0B_0(0,25) + P_1B_1(0,25) + P_2B_2(0,25) + P_3B_3(0,25)$$

Vypočítáme hodnoty bersteinových polynomů a pak postupně vezmeme  $x, y, z$ -ovou souřadnici jednotlivých bodů a dostaneme tři čísla, která udávají výsledný bod na křivce. Matematický zápis je:

$$Q(t) = \sum_{i=0}^3 P_i B_i(t), \quad t \in \langle 0, 1 \rangle \quad (7.2)$$

Pro plochy je výpočet obtížnější. Jako vstup máme síť řídicích bodů a tedy každý bod má dva indexy – řádkový a sloupcový. Při výpočtu přiřadíme každému bodu dvě bázové funkce, které odpovídají indexům daného bodu, tzn. bod  $P_{31}$  bude násoben bersteinovými polynomy  $B_3$  a  $B_1$ . Jak víme plocha je dána dvěma parametry, proto první funkce bude vyčíslena s prvním parametrem a druhá s druhým parametrem. Matematicky můžeme všechny tyto kombinace zapsat jako:

$$S(r, s) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 P_{ij} B_i(r) B_j(s), \quad (7.3)$$

Tento princip funguje i pro další typy křivek a ploch jen s různými tvary bázových polynomů.

### 7.1.1 Fergusonovy křivky a plochy

Základní oblouk je určen čtyřmi body  $P_0, P_1, P_2, P_3$ . Křivka má krajní body  $P_0, P_3$ . Tečné vektory v těchto bodech jsou  $\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_3P_2}$ . Velikost těchto vektorů ovlivňuje tvar křivky – čím je vektor větší, tím více se křivka k vektoru přibližuje.

Křivka je definována parametrickými rovnicemi:

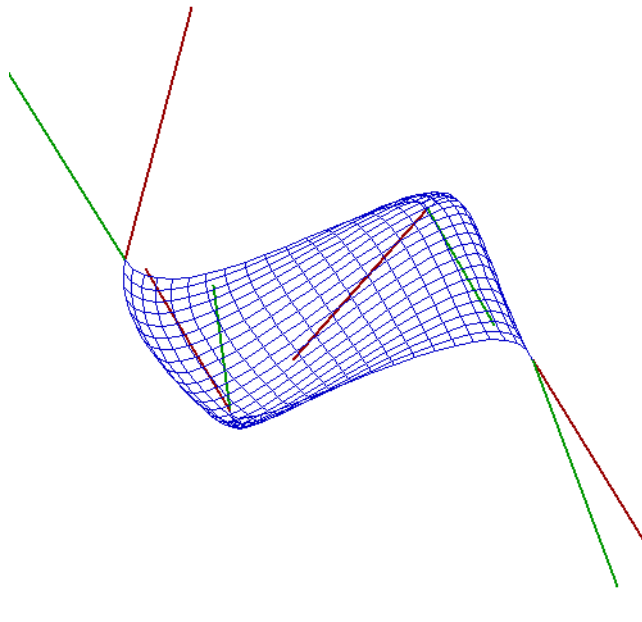
$$Q(t) = \sum_{i=0}^3 P_i F_i(t), \quad t \in \langle 0, 1 \rangle \quad (7.4)$$

$$\begin{aligned} F_0(t) &= t^3 - t^2 - t + 1 \\ F_1(t) &= t^3 - 2t^2 + t \\ F_2(t) &= -3t^3 + 4t^2 \\ F_3(t) &= t^3 - t^2 \end{aligned} \quad (7.5)$$

Dvojměrným zobecněním Fergusonových křivek dostaneme Fergusonovy plochy. Jsou dány sítí reálných bodů  $P_{ij}$  a jejich rovnice je:

$$Q(r, s) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 P_{ij} F_i(r) F_j(s), \quad (7.6)$$

kde  $F_i$  jsou polynomy definované v rovnici (6.5) a  $(r, s) \in \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$ .



Obrázek 7.1: Fergusonova plocha

### 7.1.2 Bézierovy křivky a plochy

Bézierovy křivky a plochy jsou velmi často používány v technické praxi. Za jejich zakladatele je považován P. E. Bézier a nezávisle na něm také P. de Casteljaeu. Křivka je určena čtyřmi body a prochází prvním a posledním z nich. Vektory  $\overrightarrow{P_0P_1}$ ,  $\overrightarrow{P_3P_2}$  určují tečny v krajních bodech. Jejich směrnice jsou rovny třetině délky těchto úseček.

Křivka je definována parametrickými rovnicemi:

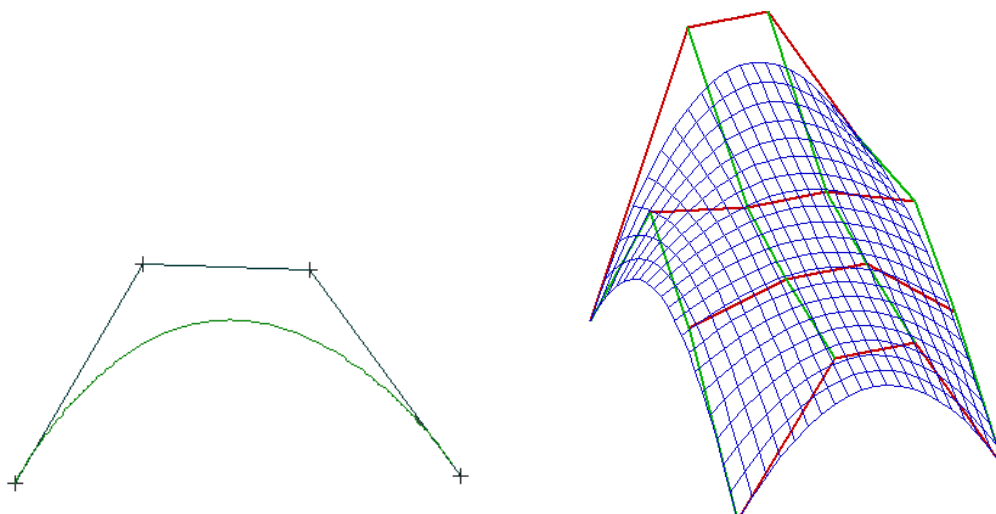
$$Q(t) = \sum_{i=0}^3 P_i B_i(t), \quad t \in \langle 0, 1 \rangle \quad (7.7)$$

$$\begin{aligned} B_0(t) &= (1-t)^3 \\ B_1(t) &= 3t(1-t)^2 \\ B_2(t) &= 3t^2(1-t) \\ B_3(t) &= t^3 \end{aligned} \quad (7.8)$$

Obecná Bézierova křivka vznikne zobecněním předchozího případu. Bázové polynomy tvoří binomický rozvoj.

Mějme dáno  $n + 1$  řídicích bodů, potom je Bézierova křivka tvaru:

$$Q(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_i^n(t), \quad t \in \langle 0, 1 \rangle, \quad (7.9)$$



Obrázek 7.2: Bézierova křivka a plocha

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}.$$

Dvojměrným zobecněním Bézierových křivek dostaneme Bézierovy plochy. Jsou dány sítí reálných bodů  $P_{ij}$  a rovnice plochy je:

$$Q(r, s) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 P_{ij} B_i(r) B_j(s), \quad (7.10)$$

kde  $B_i$  jsou polynomy definované v rovnici (6.8) a  $(r, s) \in \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$ .

### 7.1.3 Coonsovy křivky a plochy

Podobné Fergusonovým křivkám jsou Coonsovy křivky, pojmenované po S. A. Coonsovi. Jediným rozdílem je tvar bázových polynomů. Základní oblouk je opět určen čtyřmi body  $P_0, P_1, P_2, P_3$ . Křivka však nezačíná ani nekončí v žádném z těchto bodů. Počáteční a koncový bod leží v antitěžištích trojúhelníků  $P_0P_1P_2$  a  $P_1P_2P_3$ .

Křivka je definována parametrickými rovnicemi:

$$Q(t) = \frac{1}{6} \sum_{i=0}^3 P_i C_i(t), \quad t \in \langle 0, 1 \rangle \quad (7.11)$$

$$\begin{aligned}
C_0(t) &= (1-t)^3 \\
C_1(t) &= 3t^3 - 6t^2 + 4 \\
C_2(t) &= 3t^3 + 3t^2 + 3t + 1 \\
C_3(t) &= t^3
\end{aligned} \tag{7.12}$$

Jednotlivé Coonsovy kubiky je možné hladce napojit. Pokud má navazující oblouk první tři body shodné s posledními třemi předchozího oblouku, dostáváme po částech polynomiální křivku, která se nazývá Coonsov kubický B-spline.

Dvojrozměrným zobecněním Coonsových křivek dostaneme Coonsovy plochy. Jsou dány sítí reálných bodů  $P_{ij}$  a rovnice plochy je:

$$Q(r, s) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 P_{ij} C_i(r) C_j(s), \tag{7.13}$$

kde  $C_i$  jsou polynomy definované v rovnici (6.12) a  $(r, s) \in \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$

#### 7.1.4 B-spline křivky a plochy

Ve všech předchozích případech probíhal parametr  $t$  interval od nuly do jedné a záleželo pouze na tvaru bázových funkcí. Přidejme nyní k bázovým funkcím posloupnost reálných čísel, podle které se budou počítat jednotlivé hodnoty funkcí. Tyto bázové funkce se nazývají **B-spline funkce** a posloupnosti se říká **uzlový vektor**. Na uzlový vektor jsou kladena další omezení - je neklesající, uzly se mohou opakovat jen tolikrát, kolik je stupeň křivky a většinou bývá v intervalu od nuly do jedné, ale obecně nemusí. B-spline funkce je definována rekurentně následujícím předpisem:

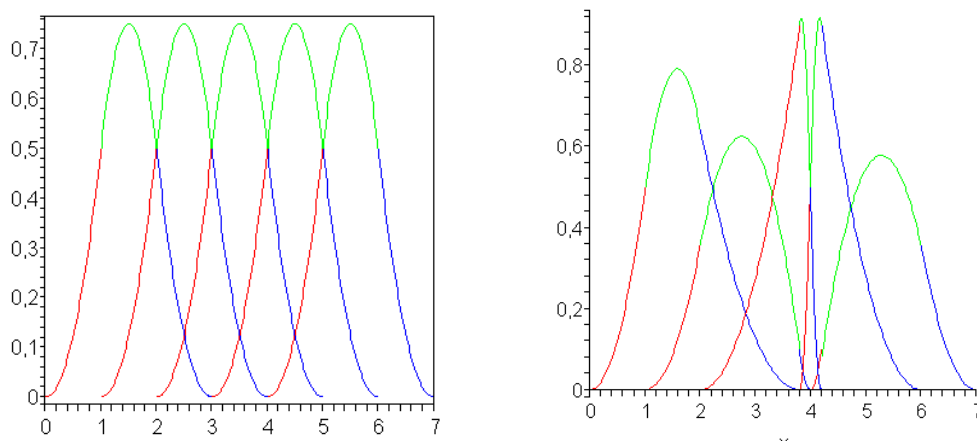
Nechť  $\mathbf{t} = (t_0, t_1, \dots, t_n)$  je uzlový vektor. **B-spline funkce** je definována jako:

$$\begin{aligned}
N_i^0(t) &= \begin{cases} 1 & \text{pro } t \in \langle t_i, t_{i+1} \rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \\
N_i^k(t) &= \frac{t - t_i}{t_{i+k} - t_i} N_i^{k-1}(t) + \frac{t_{i+k+1} - t}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} N_{i+1}^{k-1}(t),
\end{aligned} \tag{7.14}$$

kde  $0 \leq i \leq n - k - 1, 1 \leq k \leq n - 1, \frac{0}{0} := 0$ .

B-spline křivka je dána klasicky jako kombinace bodů s hodnotou příslušné bázové funkce. Výpočet je však náročnější a používá se k němu deBoorův algoritmus, který je založen na určitých vlastnostech B-spline funkcí.

Mějme dáno  $m+1$  řídicích (kontrolních) bodů  $P_0, P_1, \dots, P_m$ , kde  $P_i \in \mathbb{R}^d$ , uzlový vektor  $\mathbf{t} = (t_0, t_1, \dots, t_{m+n+1})$ . B-spline křivka stupně  $n$  pro řídicí body  $P_i$  a uzlový



Obrázek 7.3: Ukázka B-spline funkcí - ekvidistantní a neekvidistantní

vektor  $\mathbf{t}$  je definována jako:

$$C(t) = \sum_{i=0}^m P_i N_i^n(t), \quad (7.15)$$

kde  $N_i^n$  jsou bázové B-spline funkce.

Plocha je definována nad sítí bodů se dvěma stupni, dvěma uzlovými vektory pro řádky a sloupce.

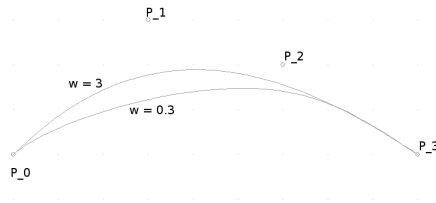
$$S(r, s) = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^l P_{ij} N_i(r) N_j(s), \quad (7.16)$$

### 7.1.5 NURBS křivky a plochy

Zkratka NURBS bývá vtipně vysvětlována jako Nobody Understand Rational B-Spline. Ve skutečnosti však znamená neuniformní racionální B-spline. Kromě slova racionální jsme se již se všemi ostatními pojmy setkali. B-spline funkce a tedy i křivky a plochy byly probrány v předchozí části. Jsou to aproximační křivky a plochy dané řídicími body a spjaté s B-spline funkcemi. Tyto funkce jsou zadány rekurentně a jejich tvar závisí na uzlovém vektoru.

Neuniformní znamená, že rozdíl sousedních čísel v uzlovém vektoru není konstantní. Tj. průběh křivkou není plynulý, což dává větší možnosti při úpravě tvaru.

Pojem racionální vznikl přidáním vah k bodům. Každému bodu je přiřazeno obvykle kladné číslo, které udává, jakou silou se bude křivka k danému bodu přitahovat. Pokud je v intervalu  $]0,1[$ , znamená to, že vliv je malý a křivka jde od bodu dál. Pokud je větší než jedna, zvyšuje se síla tohoto bodu a ten si křivku přitáhne. Geometricky je výpočet plochy s váhami řešen rozšířením prostoru o dimenzi výše.



Obrázek 7.4: Vliv váhy na tvar křivky

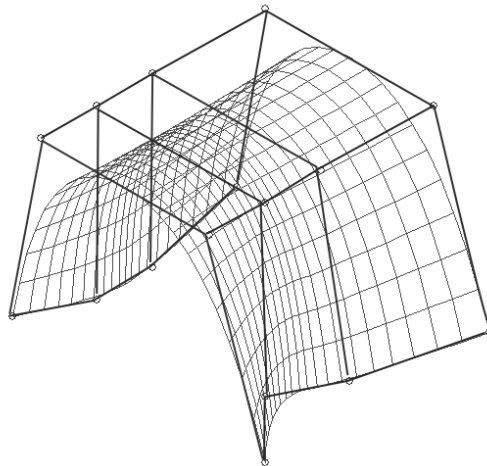
Za čtvrtou souřadnici bodu se bere váha a počítá se s ní stejně jako s ostatními souřadnicemi. Na konci výpočtu se vahou první tři vypočtené hodnoty vydělí. Matematicky to lze zapsat jako:

$$C(t) = \frac{\sum_{i=0}^m w_i P_i N_i^n(t)}{\sum_{i=0}^m w_i N_i^n(t)}, \quad (7.17)$$

NURBS křivky a plochy se používají v CAD systémech pro jejich velmi dobré modelační schopnosti. Změnou polohy bodu, velikosti váhy či tvarem uzlového vektoru se může měnit lokálně tvar křivky či plochy.

Oproti předchozím typům křivek dovedou NURBS jako jediné přesně vyjádřit kuželosečky a tedy s nimi jdou konstruovat základní tělesa (kužel, válec, anuloid, atd.). Obecná NURBS plocha vypadá matematicky již poměrně složitě:

$$C(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^q \sum_{j=0}^r w_{ij} P_{ij} N_i^m(u) N_j^n(v)}{\sum_{i=0}^q \sum_{j=0}^r N_i^m(u) N_j^n(v)}, \quad (7.18)$$



Obrázek 7.5: NURBS plocha a její řídicí síť

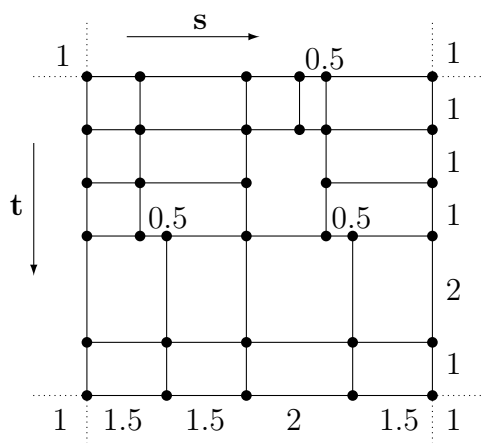
### 7.1.6 T-spline

Následovníkem NURBS se staly T-spline plochy. Jsou ve všem podobné NURBS plochám – řídicí body, bazové B-spline funkce, váhy ALE NEPOTŘEBUJÍ PRAVIDELNOU SÍŤ. Jejich uspořádání je libovolné a jsou propojeny pouze pomocí lokálních uzlových vektorů, které popisují jejich vztah k ostatním bodům v okolí. Nepravidelné navazování je nazýváno T-junctions, což je místo, kde v síti bodů leží jeden krajní bod hrany uprostřed hrany jiné.

Výhodou používání T-spline je omezení počtu kontrolních bodů. Každý NURBS plocha je zároveň i T-spline. Pomocí algoritmu nazvaného T-spline simplification lze omezit počet řídicích bodů původní NURBS plochy na polovinu až třetinu. Dále se zbavíme tzv. superflous(nadbytečných) bodů body! superflous, které jsou v NURBS síti pouze pro doplnění její pravidelnosti.

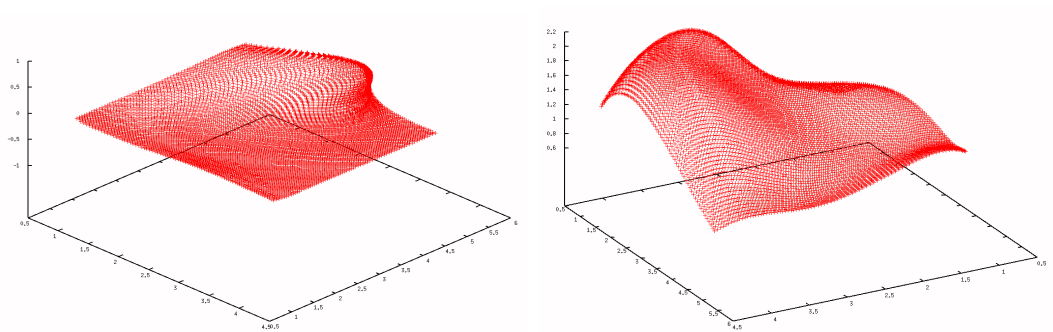
Další předností T-spline je velmi dobré napojování libovolně velkých ploch. Pro grafiky je také velmi výhodná funkce přidávání nových bodů pomocí algoritmu T-spline refinement bez změny tvaru výsledné plochy a bez přidávání celého sloupce a řádku do sítě.

Pravidla pro jejich tvorbu jsou náročnější, ale zájemci je naleznou v odkazech.



Obrázek 7.6: Obecná T-mesh





Obrázek 7.7: Obecná T-spline plocha ( $z = 0$ ,  $z$  obecné)